NOMBRES COMPLEXES 1

Dans cette brève étude, on insistera sur l'intervention des nombres complexes en analyse (résolution d'équations différentielles) et sur leur utilisation en électricité et en électronique.

a) Sommes $a + b\mathrm{i}$ telles que $\mathrm{i}^2 = -1$: égalité, somme, produit, conjugué, inverse.
Représentation géométrique.
Lignes de niveau des fonctions $z \mapsto \mathscr{Re}(z)$ et $z \mapsto \mathscr{Im}(z)$.

La construction de $\mathbb{C}$ n'est pas au programme.
Les étudiants doivent connaître la notation $x + \mathrm{j}y$, utilisée en électricité.
Aucune connaissance sur les applications des nombres complexes à la géométrie n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

b) Module d'un nombre complexe ; argument d'un nombre complexe non nul.
Notation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$; forme trigonométrique $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où $r > 0$.
Lignes de niveau des fonctions $z \mapsto |z - a|$ et $z \mapsto \operatorname{Arg}(z - a)$.
Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement.
Relation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$; lien avec les formules d'addition.

Le repérage polaire $\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où ρ est de signe quelconque, est hors programme.

c) Formule de Moivre. Formules d'Euler.

Travaux pratiques

1° Exemples de mise en œuvre des formules de Moivre et d'Euler : linéarisation de polynômes trigonométriques.

Cette activité est à mener en liaison avec l'enseignement des sciences physiques ; toute virtuosité en ce domaine est exclue ; aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques et toutes les indications utiles doivent être fournies.

2° Résolution des équations du second degré à coefficients réels.

La résolution d'équations à coefficients complexes et l'étude des racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe sont hors programme.

NOMBRES COMPLEXES 2

Les premiers éléments de l'étude des nombres complexes ont été mis en place en première et terminale technologique, en liaison avec l'enseignement des sciences physiques. Les objectifs sont de mettre en œuvre et de compléter cet acquis, d'une part pour fournir des outils qui sont utilisés en électricité, en mécanique et en automatique, d'autre part pour mettre en évidence les_interprétations géométriques et les interventions des nombres complexes en analyse : fonctions à valeurs complexes et représentations géométriques associées, calcul intégral, résolution d'équations différentielles.

a) Forme algébrique $z = x + \mathrm{i}\, y$. Représentation géométrique. Lignes de niveau des fonctions $z \mapsto \mathscr{Re}(z)$ et $z \mapsto \mathscr{Im}(z)$.	La construction de $\mathbb{C}$ n'est pas au programme. Les étudiants doivent connaître la notation $z = x + \mathrm{j}\, y$, utilisée en électricité.
b) Module d'un nombre complexe ; argument d'un nombre complexe non nul. Notation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$; forme trigonométrique $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où $r > 0$. Lignes de niveau des fonctions $z \mapsto \lvert z - a \rvert$ et $z \mapsto \mathrm{Arg}(z - a)$.	Le repérage polaire $\rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où ρ est de signe quelconque, est hors programme.
c) Formule de Moivre. Formules d'Euler.	
d) Transformations élémentaires : translation associée à $z \mapsto z + b$, similitude directe associée à $z \mapsto az$, symétrie associée à $z \mapsto \bar{z}$, inversion complexe associée à $z \mapsto \frac{1}{z}$.	On se bornera à l'étude de l'image d'une droite ou d'un cercle et à la conservation de l'orthogonalité. Pour l'inversion complexe, les cercles considérés passent par l'origine ; l'inversion géométrique est hors programme.

<u>Travaux pratiques</u>

1° Linéarisation de polynômes trigonométriques.	Dans le cas d'un exposant supérieur ou égal à 4, le résultat sera obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel.
2° Résolution des équations du second degré à coefficients complexes.	L'étude systématique des racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe est hors programme.
3° Exemples d'étude de transformations associées à $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto \dfrac{az + b}{cz + d}$.	On donnera les indications permettant de ramener l'étude de telles transformations à une succession de transformations élémentaires figurant au programme. On se bornera aux images de droites (ou de parties de droite) ou de cercles (ou d'arcs de cercle). On pourra faire le lien avec certains diagrammes de Nyquist utilisés en électronique. On pourra également être amené à étudier d'autres exemples simples de transformations, telles que celles associées à $z \mapsto z^2$ ou à $z \mapsto \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, en mettant en place les familles de courbes orthogonales associées ; mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

SUITES NUMERIQUES 1

Les suites sont un outil indispensable pour l'étude des "phénomènes discrets", et c'est à ce titre qu'elles font l'objet d'une initiation. Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée à leur propos.
Le programme se place dans le cadre des suites définies pour tout entier naturel ou pour tout entier naturel non nul.

a) Comportement global : suites croissantes, suites décroissantes.	
b) Langage des limites : Limite des suites de terme général n, n^2, n^3, $\sqrt{n}$. Limite des suites de terme général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Introduction du symbole $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Si une fonction f admet une limite ℓ en $+\infty$, alors la suite $u_n = f(n)$ converge vers ℓ.	L'étude des limites par (A, N) et par (ε, N) est hors programme. L'étude des suites de référence ci-contre et, plus largement, des suites $u_n = f(n)$ est à mener en liaison étroite avec celle des fonctions correspondantes.
Énoncés usuels sur les limites (admis). Comparaison, compatibilité avec l'ordre. Somme, produit, quotient.	Ces énoncés sont calqués sur ceux relatifs aux fonctions. Il n'y a pas lieu de s'attarder à leur présentation : l'objectif est d'apprendre aux étudiants à les mettre en œuvre sur des exemples simples.
Limite et comportements asymptotiques comparés des suites ($\ln n$) ; (a^n), a réel strictement positif ; (n^p), p entier.	

Travaux pratiques

1° Exemples d'étude de situations relevant de suites arithmétiques ou géométriques.	On privilégiera les situations issues de la vie économique et sociale ou de la technologie. Mis à part le cas des suites arithmétiques ou géométriques, l'étude d'une suite définie par son premier terme et une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ est hors programme.
2° Exemples d'étude du comportement de suites de la forme $u_n = f(n)$ (encadrement, monotonie, limite).	On se limitera à des cas simples. Il s'agit notamment de pouvoir étudier et comparer, sur certains modèles mathématiques, la tendance à long terme d'un phénomène.

SUITES NUMERIQUES 2

Les suites sont un outil indispensable pour l'étude des "phénomènes discrets", et c'est à ce titre qu'elles font l'objet d'une initiation. Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée à leur propos.
Le programme se place dans le cadre des suites définies pour tout entier naturel ou pour tout entier naturel non nul.

a) Comportement global : suites croissantes, suites décroissantes.	
b) Énoncés usuels sur les limites (admis). Comparaison, compatibilité avec l'ordre. Somme, produit, quotient.	Il s'agit d'un prolongement de l'étude d'une suite pour les grandes valeurs de n, amorcée en terminale technologique. L'étude des limites par (A, N) et par (ε, N) est hors programme. Ces énoncés sont calqués sur ceux relatifs aux fonctions. Il n'y a pas lieu de s'attarder à leur présentation : l'objectif est d'apprendre aux étudiants à les mettre en œuvre sur des exemples simples.
Limite et comportements asymptotiques comparés des suites ($\ln n$) ; (a^n), a réel strictement positif ; (n^p), p entier.	

Travaux pratiques

1° Exemples d'étude de situations relevant de suites arithmétiques ou géométriques.	On privilégiera les situations issues de la vie économique et sociale ou de la technologie. Dans le cas de l'approximation d'une solution d'une équation, on pourra être amené à définir une suite par son premier terme et une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$; mis à part le cas des suites arithmétiques ou géométriques, aucune connaissance sur de telles suites n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques, et toutes les indications nécessaires doivent être fournies.
2° Exemples d'étude du comportement de suites de la forme $u_n = f(n)$ (encadrement, monotonie, limite).	On se limitera à des cas simples.
3° Exemples d'étude de suites définies par une relation de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ et leurs deux premiers termes.	L'étude de ce type de suite a pour objectif de préparer la résolution, à l'aide de la transformation en Z, de certaines équations aux différences.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE

On se place dans le cadre des fonctions à valeurs réelles ou complexes, définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, qui servent à modéliser mathématiquement des "phénomènes continus". Les étudiants devront savoir traiter les situations qui se prêtent à une telle modélisation.
On consolidera les acquis sur les fonctions en tenant compte, notamment sur les limites, des programmes de mathématiques suivis antérieurement par les étudiants.
Ce module de programme énumère les fonctions intervenant dans les autres modules d'analyse, modules où figurent les rubriques de travaux pratiques concernant ces fonctions.
En particulier dans l'ensemble de ces modules, on utilisera largement les moyens informatiques (calculatrice, ordinateur), qui permettent notamment de faciliter la compréhension d'un concept ou d'une méthode en l'illustrant graphiquement, numériquement ou dans un contexte lié à la spécialité considérée, sans être limité par d'éventuelles difficultés techniques.
Les calculs à la main, nécessaires pour développer la maîtrise des méthodes figurant au programme, ont leur cadre défini dans les rubriques de travaux pratiques, le plus souvent dans la colonne de commentaires.

Le champ des fonctions étudiées se limite aux fonctions usuelles suivantes :	Les représentations graphiques doivent jouer un rôle important.
a) Fonctions en escalier, fonctions affines par morceaux, fonction exponentielle $t \mapsto \exp t$ ou $t \mapsto \mathrm{e}^{t}$, fonction logarithme népérien $t \mapsto \ln t$, fonctions puissances $t \mapsto t^{\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, fonctions circulaires, fonctions qui se déduisent de façon simple des précédentes par opérations algébriques ou par composition.	Selon les besoins des autres disciplines (chimie, acoustique,…), on pourra mentionner la fonction logarithme décimal $x \mapsto \log x$, mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
Comparaison des fonctions exponentielle, puissances et logarithme au voisinage de $+\infty$.	
b) Fonctions circulaires réciproques ; on donnera leurs dérivées.	La dérivabilité de ces fonctions sera admise.
c) Fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$ avec $a \in \mathbb{C}$.	

CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL 1

Le programme se place dans le cadre de fonctions à valeurs réelles définies et régulières (c'est-à-dire admettant des dérivées à un ordre quelconque) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Il n'y a pas lieu de reprendre la présentation du concept de dérivée. On s'assurera que les étudiants connaissent les interprétations géométrique et cinématique de la dérivée en un point.
On consolidera et on approfondira les acquis de terminale technologique sur la pratique du calcul des dérivées.
Dans le cas de deux variables t et x liées par une relation fonctionnelle $x = f(t)$, on introduira la notation différentielle $\mathrm{d}f = f'(t)\,\mathrm{d}t$; on donnera son interprétation graphique et on montrera l'intérêt de la différentielle pour les problèmes d'approximation. Aucune difficulté ne doit être soulevée sur le statut mathématique de la notion de différentielle.
Le concept d'intégrale sera introduit sans soulever de problème théorique.

a) Primitives

Définition. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.
Primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées ; primitives des fonctions de la forme
$x \mapsto g'(ax+b)$, $(\exp g)\,g'$ et $g^{\alpha} g'$, où $\alpha \neq -1$, $\dfrac{g'}{g}$ où g est à valeurs strictement positives.

L'existence des primitives est admise.

b) Intégrale

Étant donné f et un couple (a,b) de points de I, le nombre $F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f, est indépendant du choix de F. On l'appelle intégrale de a à b de f et on le note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Dans le cadre de fonctions positives, interprétation graphique de l'intégrale à l'aide d'une aire.
Étant donné un point a de I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I prenant la valeur zéro au point a.

Aucune théorie sur la notion d'aire n'est au programme. On admettra son existence et ses propriétés élémentaires.
Les étudiants doivent connaître l'aire des domaines usuels : rectangle, triangle, trapèze.

Propriétés de l'intégrale :
- Relation de Chasles.
- Linéarité.
- Positivité : si $a \le b$ et $f \ge 0$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \ge 0$;

intégration d'une inégalité.
- Inégalité de la moyenne : si $a \le b$ et $m \le f \le M$,

alors $m(b-a) \le \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \le M(b-a)$.

Il conviendra d'interpréter, chaque fois qu'il est possible, les propriétés de l'intégrale en termes d'aire.

Travaux pratiques

1° Exemples d'emploi du calcul différentiel pour la recherche d'extremums, l'étude du sens de variation et le tracé des représentations graphiques des fonctions.	Les exemples seront issus, le plus souvent possible, de l'étude de phénomènes rencontrés en sciences physiques, en biologie, en économie ou en technologie. On se limitera aux situations qui se ramènent au cas des fonctions d'une seule variable. Pour la détermination d'une fonction, on pourra être amené à résoudre un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss. Il convient de ne pas abuser des problèmes centrés sur l'étude traditionnelle de fonctions définies par une formule donnée *a priori*, dont on demande de tracer la courbe représentative. Toute étude de branche infinie, notamment la mise en évidence d'asymptote, devra comporter des indications sur la méthode à suivre.
2° Exemples de calcul d'intégrales à l'aide de primitives.	Les étudiants doivent savoir reconnaître si un exemple donné de fonction est de l'une des formes figurant au programme. Mis à part le cas de primitives de la forme précédente, tout calcul de primitive devra comporter des indications sur la méthode à suivre. On pourra montrer l'intérêt d'exploiter les propriétés des fonctions périodiques, des fonctions paires et des fonctions impaires, mais toute formule de changement de variable est hors programme.
3° Exemples de calcul d'aires, de volumes, de valeurs moyennes.	On pourra aussi, selon la spécialité, proposer des exemples de détermination de centres d'inertie, de calcul de moments d'inertie et de calcul de valeurs efficaces.
4° Exemples de mise en œuvre d'algorithmes d'approximation d'une intégrale.	L'objectif est de familiariser les étudiants à un certain savoir-faire concernant quelques méthodes élémentaires (point-milieu, trapèzes), mais aucune connaissance sur ces méthodes n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL 2

Le programme se place dans le cadre de fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Il n'y a pas lieu de reprendre la présentation des concepts de dérivée et d'intégrale, et aucune difficulté théorique ne doit être soulevée à ce sujet. Les interprétations géométrique et cinématique de la dérivée en un point doivent être connues.
On consolidera et on approfondira les acquis de terminale technologique sur la pratique du calcul des dérivées et des primitives.
Dans le cas de deux variables t et x liées par une relation fonctionnelle $x = f(t)$, on introduira la notation différentielle $\mathrm{d}f = f'(t)\,\mathrm{d}t$; on donnera son interprétation graphique et on montrera l'intérêt de la différentielle pour les problèmes d'approximation. Aucune difficulté ne sera soulevée sur le statut mathématique de la notion de différentielle.
Pour l'intégration, sauf cas indispensable (pour lequel aucune difficulté théorique ne sera soulevée) on se limitera, comme en terminale technologique, au cas de fonctions dérivables.
Aucune théorie de la notion d'aire n'est au programme ; on admettra son existence et ses propriétés élémentaires.
Les exemples de calculs d'approximation cités dans le programme n'ont d'autre but que d'exercer les étudiants à mettre en œuvre, sur des exemples simples, une démarche algorithmique qui puisse être facilement interprétée graphiquement.

a) Étant donné un point a de I et une fonction f dérivable sur I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I prenant la valeur zéro au point a.	
Propriétés de l'intégrale : • Relation de Chasles. • Linéarité. • Positivité : si $a \le b$ et $f \ge 0$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \ge 0$;	Il conviendra d'interpréter, chaque fois qu'il est possible, ces propriétés en termes d'aire.
intégration d'une inégalité ; inégalité $\left\lvert \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\rvert \le \int_a^b \lvert f(t)\rvert\,\mathrm{d}t$.	On ne soulèvera aucune difficulté théorique à propos de l'existence de l'intégrale $\int_a^b \lvert f(t)\rvert\,\mathrm{d}t$.
• Inégalité de la moyenne : si $a \le b$ et $m \le f \le M$, alors $m(b-a) \le \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \le M(b-a)$; de même, si $a \le b$ et si $\lvert f\rvert \le k$, alors $\int_a^b \lvert f(t)\rvert\,\mathrm{d}t \le k(b-a)$.	
• Inégalité des accroissements finis : si $a \le b$ et si $\lvert f'\rvert \le k$, alors $\lvert f(b) - f(a)\rvert \le k(b-a)$.	Les théorèmes d'existence (théorème de Rolle, formule des accroissements finis) et la formule de Taylor sont hors programme.
b) Intégration par parties.	
c) Intégration par changement de variable.	On s'appuiera sur les exemples $t \mapsto t+b$ et $t \mapsto at$, où a et b sont des nombres réels, qui donnent lieu à une interprétation graphique, pour présenter sans justification théorique d'autres cas où le changement de variable est donné.
d) Illustration de l'emploi du calcul intégral pour l'obtention de majorations et d'encadrements, à l'aide d'exemples.	On se limitera à des exemples très simples et des indications pour l'encadrement de la fonction à intégrer devront être fournies.
e) Emploi de majorations tayloriennes pour l'obtention du développement limité au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \exp t$.	Le résultat sera démontré, jusqu'à l'ordre 3.
Développements limités des fonctions : $t \mapsto \ln(1+t)$, $t \mapsto (1+t)^{\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \cos t$.	Ces résultats seront admis.
f) Dérivée et primitives d'une fonction à valeurs complexes.	Pour ces notions, on se limitera aux fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$, avec $a \in \mathbb{C}$.

Travaux pratiques

1° Exemples d'emploi du calcul différentiel pour la recherche d'extremums, l'étude du sens de variation et le tracé des représentations graphiques des fonctions.	Les exemples seront issus, le plus souvent possible, de l'étude de phénomènes rencontrés en sciences physiques, en biologie, en économie ou en technologie. On se limitera aux situations qui se ramènent au cas des fonctions d'une seule variable. Pour la détermination d'une fonction, on pourra être amené à résoudre un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss. Il convient de ne pas abuser des problèmes centrés sur l'étude traditionnelle de fonctions définies par une formule donnée *a priori*, dont on demande de tracer la courbe représentative. Toute étude sur le comportement asymptotique d'une fonction devra comporter des indications sur la méthode à suivre.
2° Exemples de tracé de courbes planes définies par une représentation paramétrique $x = f(t)$, $y = g(t)$.	On privilégiera les exemples liés aux autres enseignements (mouvement d'un point, signaux électriques, modélisation géométrique,…). Les étudiants doivent savoir déterminer la tangente en un point où le vecteur dérivé n'est pas nul. Aucune connaissance sur l'étude des points singuliers et des branches infinies n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
3° Exemples simples d'emploi des développements limités pour l'étude locale des fonctions.	Les étudiants doivent savoir utiliser, sur des exemples simples de développements limités, les opérations addition, multiplication et intégration. Pour la composition, des indications sur la méthode à suivre devront être fournies.
4° Exemples de recherche des solutions d'une équation numérique, et de mise en œuvre d'algorithmes d'approximation d'une solution à l'aide de suites.	Sur des exemples, on mettra en œuvre quelques méthodes classiques : dichotomie, méthode de la corde (Lagrange), méthode de la tangente (Newton). Aucune connaissance spécifique sur celles-ci n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
5° Calcul d'une primitive figurant au formulaire officiel ou s'en déduisant par un changement de variable du type $t \mapsto t + b$ et $t \mapsto at$.	On pourra montrer l'intérêt d'exploiter dans le calcul intégral les propriétés des fonctions périodiques, des fonctions paires et des fonctions impaires.
6° Calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle dans le cas de pôles simples.	Dans le cas où il y a des pôles multiples, des indications doivent être données sur la méthode à suivre.
7° Calcul d'une primitive d'une fonction exponentielle-polynôme (de la forme $t \mapsto e^{at}P(t)$ où a est un nombre complexe et où P est un polynôme).	Les étudiants devront savoir traiter les cas qui s'y ramènent simplement par linéarisation.
8° Exemples de calcul d'intégrales.	Tout excès de technicité est à éviter pour le calcul des primitives.
9° Exemples de calcul d'aires, de volumes, de valeurs moyennes, de valeurs efficaces.	On pourra aussi, selon la spécialité, proposer des exemples de détermination de centres d'inertie et de calcul de moments d'inertie.
10° Exemples de mise en œuvre d'algorithmes d'approximation d'une intégrale.	L'objectif est de familiariser les étudiants avec quelques méthodes élémentaires (point-milieu, trapèzes), mais aucune connaissance sur ces méthodes n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL 3

Le programme se place dans le cadre de fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Il n'y a pas lieu de reprendre la présentation des concepts de dérivée et d'intégrale, et aucune difficulté théorique ne doit être soulevée à ce sujet. Les interprétations géométrique et cinématique de la dérivée en un point doivent être connues.
On consolidera et on approfondira les acquis de terminale technologique sur la pratique du calcul des dérivées et des primitives.
Dans le cas de deux variables t et x liées par une relation fonctionnelle $x = f(t)$, on introduira la notation différentielle $\mathrm{d}x = f'(t)\,\mathrm{d}t$; on donnera son interprétation graphique et on montrera l'intérêt de la différentielle pour les problèmes d'approximation. Aucune difficulté ne doit être soulevée sur le statut mathématique de la notion de différentielle.
L'étude de la continuité ne constitue pas un objectif en soi ; toutefois, on sera amené à donner une interprétation graphique de cette propriété et à l'illustrer par des exemples et des contre-exemples simples.
Pour l'intégration, on se limitera au cas de fonctions continues par morceaux.
Aucune théorie de la notion d'aire n'est au programme ; on admettra son existence et ses propriétés élémentaires.
Les exemples de calculs d'approximation cités dans le programme n'ont d'autre but que d'exercer les étudiants à mettre en œuvre, sur des exemples simples, une démarche algorithmique qui puisse être facilement interprétée graphiquement.

a) Étant donné un point a de I et une fonction f continue sur I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I prenant la valeur zéro au point a.	
Propriétés de l'intégrale : • Relation de Chasles. • Linéarité. • Positivité : si $a \le b$ et $f \ge 0$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \ge 0$; intégration d'une inégalité ; inégalité $\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \le \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$. • Inégalité de la moyenne : si $a \le b$ et $m \le f \le M$, alors $m(b-a) \le \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \le M(b-a)$; de même, si $a \le b$ et si $\|f\| \le k$, alors $\int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t \le k(b-a)$.	Il convient d'interpréter, chaque fois qu'il est possible, les propriétés de l'intégrale en termes d'aires.
• Inégalité des accroissements finis : si $a \le b$ et si $\|f'\| \le k$, alors $\|f(b)-f(a)\| \le k(b-a)$.	Les théorèmes d'existence (théorème de Rolle, formule des accroissements finis) et la formule de Taylor sont hors programme.
b) Intégration par parties.	
c) Intégration par changement de variable.	On s'appuiera sur les exemples $t \mapsto t+b$ et $t \mapsto at$, où a et b sont des nombres réels, qui donnent lieu à une interprétation graphique, pour présenter sans justification théorique d'autres cas de changement de variable. Dans ces cas on soulignera l'intérêt de la notation différentielle.
d) Formule de Taylor avec reste intégral. Majoration du reste, inégalité de Taylor Lagrange. Application à l'obtention, au voisinage de 0, des développements limités des fonctions usuelles : $t \mapsto \exp t$, $t \mapsto \ln(1+t)$, $t \mapsto (1+t)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \cos t$.	Le résultat, démontré pour la fonction exponentielle, pourra être admis pour les autres fonctions.
e) Dérivée et primitives d'une fonction à valeurs complexes.	On se contentera de donner les définitions et quelques exemples, en particulier celui des fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$, avec $a \in \mathbb{C}$.

Travaux pratiques

1° Exemples d'emploi du calcul différentiel pour la recherche d'extremums, l'étude du sens de variation et le tracé des représentations graphiques des fonctions.	Les exemples seront issus, le plus souvent possible, de l'étude de phénomènes rencontrés en sciences physiques, en biologie ou en technologie. On se limitera aux situations qui se ramènent au cas des fonctions d'une seule variable. Pour la détermination d'une fonction, on pourra être amené à résoudre un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss. Il convient de ne pas abuser des problèmes centrés sur l'étude traditionnelle de fonctions définies par une formule donnée *a priori*, dont on demande de tracer la courbe représentative. Toute étude sur le comportement asymptotique d'une fonction devra comporter des indications sur la méthode à suivre.
2° Exemples de tracé de courbes planes définies par une représentation paramétrique $t \mapsto f(t) + \mathrm{i}\, g(t)$ ou $t \mapsto F(t) = r(t)\exp(\mathrm{i}\,\varphi(t))$, où $r(t) \geq 0$.	On privilégiera les exemples liés aux autres enseignements (mouvement d'un point, signaux électriques, modélisation géométrique,…). L'objectif ici est la gestion conjointe de deux tableaux de variation : dans un cas, de f et de g, dans l'autre de r et de φ. Les étudiants doivent savoir déterminer la tangente en un point où le vecteur dérivé n'est pas nul. Aucune connaissance sur l'étude des points singuliers et des branches infinies n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques. L'étude des courbes définies par une équation polaire $\theta \mapsto \rho(\theta)$ est hors programme.
3° Exemples simples d'emploi des développements limités pour l'étude locale des fonctions.	Les étudiants doivent savoir utiliser, sur des exemples simples de développements limités, les opérations addition, multiplication et intégration. Pour les autres opérations (quotient, composition), des indications sur la méthode à suivre doivent être fournies.
4° Exemples de recherche des solutions d'une équation numérique, et de mise en œuvre d'algorithmes d'approximation d'une solution à l'aide de suites.	Sur des exemples, on mettra en œuvre quelques méthodes classiques : dichotomie, méthode de la corde (Lagrange), méthode de la tangente (Newton). Aucune connaissance sur celles-ci n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
5° Calcul d'une primitive figurant au formulaire officiel ou s'en déduisant par un changement de variable	Aucune difficulté théorique ne sera soulevée dans le cas de l'intégration par changement de variable. Les changements de variable autres que $t \mapsto t + b$ ou $t \mapsto at$ seront donnés. Les étudiants doivent savoir utiliser dans le calcul intégral les propriétés des fonctions périodiques, des fonctions paires et des fonctions impaires.
6° Calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle dans le cas de pôles simples.	Dans le cas où il y a des pôles multiples, des indications doivent être données sur la méthode à suivre.
7° Calcul d'une primitive d'une fonction exponentielle-polynôme (de la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{at} P(t)$, où a est un nombre complexe et où P est un polynôme).	Les étudiants doivent savoir traiter les cas qui s'y ramènent simplement par linéarisation.
8° Exemples de calcul d'intégrales.	Tout excès de technicité est à éviter pour le calcul des primitives.
9° Exemples de calculs d'aires, de volumes, de valeurs moyennes, de valeurs efficaces.	On pourra aussi, selon la spécialité, proposer des exemples de détermination de centres d'inertie et de calcul de moments d'inertie.
10° Exemples de mise en œuvre d'algorithmes d'approximation d'une intégrale.	L'objectif est de familiariser les étudiants à un certain savoir-faire concernant quelques méthodes élémentaires (point-milieu, trapèzes, Simpson), mais aucune connaissance sur ces méthodes n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

SERIES NUMERIQUES ET SERIES DE FOURIER

L'étude de séries numériques très simples, préalable à l'étude des séries de Fourier, a pour objectif de permettre aux étudiants de se familiariser avec les "sommes infinies" et la notation Σ. La plupart des résultats relatifs aux séries numériques pourront être admis et ne feront l'objet d'aucun développement théorique.
La décomposition de signaux périodiques en séries de Fourier est un outil indispensable pour l'étude des phénomènes vibratoires en électricité, en optique ou en mécanique.

Séries numériques

a) Définition de la convergence d'une série à termes réels. Convergence des séries géométriques.	L'étude des sommes partielles d'une suite géométrique permet d'introduire la convergence et la divergence des séries numériques.
b) Séries à termes positifs. Convergence des séries de Riemann. Comparaison de deux séries dans le cas où $u_n \leq v_n$.	
Comparaison de deux séries dans le cas où $u_n \sim v_n$.	La définition de deux suites équivalentes sera introduite à cette occasion mais cette notion ne fera l'objet d'aucun développement théorique.
Règle de d'Alembert.	
c) Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0.	
d) Séries absolument convergentes.	Il s'agit d'une simple introduction. Tout développement théorique est hors programme.

Séries de Fourier

a) Coefficients de Fourier d'une fonction T-périodique continue par morceaux et série de Fourier d'une telle fonction. Forme en $\cos(n\omega t)$ et $\sin(n\omega t)$ et forme exponentielle $\exp(\mathrm{i}n\omega t)$.	En liaison avec l'enseignement des sciences physiques, il conviendra de mettre en valeur le lien entre ces notions et l'étude des signaux : composantes d'un signal dans une fréquence donnée, reconstitution du signal à partir de ses composantes.
b) Convergence (admise) lorsque f est de classe C1 par morceaux (conditions de Dirichlet).	
c) Formule de Parseval (admise) donnant $\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2 \, \mathrm{d}t$ en fonction des coefficients de Fourier, lorsque f est continue par morceaux.	La formule de Parseval est à mettre en relation avec le calcul de l'énergie à partir des composantes.

Travaux pratiques

1° Exemples simples d'étude de séries numériques.	Tout excès de technicité est à éviter.
2° Recherche de développements en série de Fourier de fonctions périodiques.	On se limitera à des exemples simples et on exploitera des situations issues de l'électricité, de l'électronique ou de la mécanique. Aucune difficulté ne doit être soulevée sur la convergence des séries de Fourier en dehors des hypothèses indiquées par le programme. Toutes les indications utiles pour la vérification des conditions de Dirichlet seront données.
3° Utilisation du développement en série de Fourier d'une fonction périodique pour calculer la somme d'une série numérique.	

ANALYSE SPECTRALE : TRANSFORMATION DE LAPLACE

Ce module sera étudié en liaison étroite avec les enseignements des autres disciplines.
Le programme se borne à la transformation de Laplace des fonctions nulles sur]-∞, 0[(fonctions causales). Dans le cas d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$, on transforme donc la fonction $t \mapsto \mathcal{U}(t)\,f(t)$, où $\mathcal{U}$ désigne l'échelon unité.

On s'intéressera essentiellement aux combinaisons linéaires à coefficients réels ou complexes de fonctions de la forme $t \mapsto \mathcal{U}(t-\alpha)\,t^n\,\mathrm{e}^{r\,t}$, où α est un réel positif, n un entier positif et r un nombre complexe.

a) Transformation de Laplace :

On donnera quelques notions sur les intégrales impropres, en particulier sur la convergence d'une intégrale de la forme $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.

L'étude de la convergence des intégrales impropres données *a priori* n'est pas un objectif de la formation.

Définition de la transformation de Laplace :
$(\mathcal{L}f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$, où $p \in \mathbb{R}$.

Linéarité.
Transformée de Laplace d'une dérivée et d'une primitive.
Effet d'une translation ou d'un changement d'échelle sur la variable.
Effet de la multiplication par e^{-at} .
Transformée de Laplace des fonctions constantes et des fonctions exponentielles $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$, où $a \in \mathbb{C}$.
Dérivée d'une transformée de Laplace (admis).
Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale (admis).

En relation avec l'enseignement de l'électronique et de la régulation, on indiquera :
que les propriétés de la transformation de Laplace s'étendent au cas où p est complexe ;
comment l'impulsion unité δ peut être considérée comme obtenue par passage à la limite de fonctions (f_n) , et qu'en étudiant la limite de $(\mathcal{L}f_n)$ on est amené à dire que $(\mathcal{L}\boldsymbol{\delta}) = 1$.
Toutefois, aucune connaissance sur ces points n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

b) Calcul opérationnel :

Approche des notions de fonctions de transfert et de calcul opérationnel.

Les seules connaissances exigibles sur le calcul opérationnel portent sur le cas des fonctions rationnelles, combinées avec un facteur de retard éventuel.
Sur ces exemples, on pourra mettre en évidence l'importance de la notion de stabilité, mais les critères généraux de stabilité sont hors programme.

Travaux pratiques

1° Recherche de la transformée de Laplace d'une fonction donnée ou recherche d'une fonction dont la transformée de Laplace est donnée.	On se limitera au cas où les fonctions données ou recherchées sont des combinaisons linéaires à coefficients réels ou complexes de fonctions de la forme $t \mapsto \mathcal{U}(t-\alpha)\,t^n\,\mathrm{e}^{rt}$, où α est un nombre réel positif, n un nombre entier positif et r un nombre complexe. On habituera les étudiants à utiliser des transformations géométriques simples (translation, symétrie orthogonale) et des propriétés figurant dans le formulaire pour obtenir sans calcul la transformée d'une fonction donnée ou rechercher une fonction dont la transformée de Laplace est donnée.
2° Résolution à l'aide de la transformation de Laplace des équations différentielles linéaires d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants.	On se limitera pour le second membre aux fonctions du TP 1. On insistera sur des exemples où la transformée de Laplace présente un intérêt, par exemple lorsque le second membre est $t \mapsto (t+1)\mathcal{U}(t) - t\,\mathcal{U}(t-1)$; en revanche il est parfois peu judicieux de l'utiliser lorsque le second membre est, par exemple, la fonction $t \mapsto (t+1)\mathcal{U}(t)$.
3° Exemples d'emploi de la transformation de Laplace pour la résolution de systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coefficients constants	On se limitera pour le second membre aux fonctions exponentielles-polynômes $t \mapsto \mathrm{e}^{at}P(t)$ où $a \in \mathbb{C}$.
4° Exemples d'emploi de la transformation de Laplace pour la résolution d'équations différentielles du type : $ay'(t) + by(t) + c\int_0^t y(u)\,\mathrm{d}u = f(t)$ où a, b et c sont des constantes réelles.	On se limitera pour le second membre aux fonctions du TP1. Dans le cas où $a = 0$, on fera remarquer que $t \mapsto y(t)$ peut présenter des discontinuités.

ANALYSE SPECTRALE : TRANSFORMATION EN Z

Ce module sera étudié en liaison étroite avec les enseignements des autres disciplines, notamment parce que le traitement numérique du signal et les techniques d'échantillonnage d'un signal analogique (traitement numérique, restitution analogique) évoluent très rapidement sous l'impulsion des nouvelles technologies.
Dans ce module, on se propose de familiariser les étudiants aux phénomènes discrets par la présentation de quelques signaux discrets et de leur transformation en Z, en se limitant à des signaux causaux. Cette présentation sera complétée par l'étude de la réponse à des signaux discrets, de filtres numériques régis par une équation aux différences linéaires à coefficients constants.
L'introduction des séries entières a pour seul but la présentation des résultats utiles pour l'étude de la transformation en Z.

a) Notions sur les séries entières

Application de la formule de Taylor avec reste intégral pour l'obtention de développements en séries entières (fonctions $t \mapsto \exp t$, $t \mapsto (1+t)^{\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \cos t$).

La théorie générale des séries entières est hors programme. L'existence du rayon de convergence est admise

b) Transformation en Z

Définition de la transformée en Z pour un signal causal :

$$(\mathcal{Z}x)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)\, z^{-n} \quad \text{où } z \in \mathbb{C} \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

Transformée des signaux usuels :
$n \mapsto 1$; $n \mapsto d(n)$ ($d(0) = 1$ et $d(n) = 0$ si $n \neq 0$) ;
$n \mapsto n$; $n \mapsto n^2$; $n \mapsto a^n$ avec a réel non nul.

En liaison avec les enseignements d'autres disciplines, on pourra donner la définition de la transformée en Z pour un signal non causal :

$$(\mathcal{Z}x)(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(k)\, z^{-k} \quad \text{où } z \in \mathbb{C} \text{ et } k \in \mathbb{Z} \text{ ;}$$

mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

Linéarité de la transformation en Z.
Effet de la multiplication par a^n (a réel non nul).
Effet d'une translation sur la variable pour un signal causal.
Théorème de la valeur initiale pour un signal causal.
Théorème de la valeur finale (admis) pour un signal causal.

En relation avec les enseignements d'autres disciplines, on pourra donner la définition du produit de convolution, pour permettre de définir la notion de fonction de transfert d'un filtre discret, mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

Travaux pratiques

1° Exemples simples de recherche de la transformée en Z d'un signal discret et de recherche d'un signal dont la transformée en Z est donnée.

On se limitera aux cas où le formulaire officiel permet de conclure.
Pour la recherche de l'original, on donnera des indications sur la méthode à utiliser, en particulier sur l'expression à décomposer en éléments simples.
En utilisant la division des polynômes, on peut écrire $(\mathcal{Z}x)(z)$ sous forme d'une série de puissances en z^{-n}. On remarquera donc qu'il est aisé de vérifier (ou d'obtenir) $x(n)$ pour les petites valeurs de n ; les moyens informatiques permettent de déterminer $x(n)$ pour d'autres valeurs de n.

2° Exemples d'emploi de la transformation en Z pour la résolution d'équations récurrentes du type :
$a\, y(n) + b\, y(n-1) + c\, y(n-2) = a_1\, x(n) + b_1\, x(n-1)$ ou
$a\, y(n+2) + b\, y(n+1) + c\, y(n) = a_1\, x(n+1) + b_1\, x(n)$
où a, b, c, a_1, b_1 sont des nombres réels, où x est un signal causal discret connu et où y est un signal causal discret inconnu.

Pour la recherche de l'original, on se référera aux commentaires du TP1.
En liaison avec les enseignements d'autres disciplines, on pourra montrer sur des exemples simples comment certaines de ces équations s'interprètent en terme de "dérivation discrète et d'intégration discrète", mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

On s'attachera à relier les exemples étudiés avec les enseignements de physique, mécanique et technologie, en faisant saisir l'importance de l'étude de phénomènes continus définis par une loi d'évolution et une condition initiale, et en faisant ressortir la signification ou l'importance de certains paramètres ou phénomènes : stabilité, oscillation, amortissement, fréquences propres, résonance,...

a) Résolution des équations linéaires du premier ordre $a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$.

b) Résolution des équations linéaires du second ordre à coefficients réels constants, dont le second membre est une fonction exponentielle-polynôme $t \mapsto \mathrm{e}^{at} P(t)$, où $a \in \mathbb{C}$.

On se placera dans le cas où a, b, c sont des fonctions dérivables à valeurs réelles et on cherchera les solutions sur un intervalle où a ne s'annule pas.

Travaux pratiques

1° Résolution d'équations différentielles linéaires du premier ordre.

2° Résolution d'équations différentielles linéaires du second ordre.

3° Exemples simples de résolution d'équations différentielles non linéaires, du premier ordre à variables séparables.

Pour les TP 1° et 2°:
- il s’agit uniquement d’équations différentielles dont le type est précisé ci-dessus ;
- toutes les indications permettant d’obtenir une solution particulière seront données.

On privilégiera les exemples issus de la cinétique chimique. Aucune connaissance sur ce TP n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

FONCTIONS DE DEUX OU TROIS VARIABLES RÉELLES

Aucune connaissance sur ce module n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques ; les notions qu'il contient sont à étudier en liaison étroite avec l'enseignement de la physique, de la mécanique, de la technologie ou de l'économie.

a) Calcul de dérivées partielles. Calcul de la dérivée d'une fonction définie par une équation implicite $f(x, y) = 0$.	On donnera aussi la notation différentielle et son interprétation en termes d'effet sur la valeur d'une fonction de petits accroissements des variables.
b) Brèves notions sur le gradient et le laplacien d'une fonction de trois variables, la divergence et le rotationnel d'un champ de vecteurs (en dimension trois).	Ces notions interviennent en particulier en thermodynamique.
c) Exemples très simples de calcul d'intégrales doubles et triples en coordonnées cartésiennes ou cylindriques, éventuellement sphériques.	On admettra tous les résultats utiles.

ANALYSE DES PHENOMENES EXPONENTIELS

1° Fonctions d'une variable réelle

On se place dans le cadre des fonctions à valeurs réelles, définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, qui servent à modéliser mathématiquement des "phénomènes continus". Les étudiants devront savoir traiter les situations qui se prêtent à une telle modélisation.
On consolidera les acquis sur les fonctions en tenant compte, notamment sur les limites, des programmes de mathématiques suivis antérieurement par les étudiants.
Ce paragraphe énumère les fonctions intervenant notamment en calcul différentiel et intégral.

Le champ des fonctions étudiées se limite aux fonctions usuelles (fonctions en escalier, fonctions affines par morceaux, fonction exponentielle $t \mapsto \exp t$ ou $t \mapsto \mathrm{e}^t$, fonction logarithme népérien $t \mapsto \ln t$, fonctions puissances $t \mapsto t^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$) et à celles qui s'en déduisent de façon simple par opérations algébriques ou par composition.

Comparaison des fonctions exponentielle, puissances et logarithme au voisinage de $+\infty$.

Les représentations graphiques doivent jouer un rôle important.

On pourra en particulier étudier des fonctions du type $t \mapsto \dfrac{A}{1+\mathrm{e}^{a-bt}}$ utilisées pour modéliser certains phénomènes économiques.

2° Calcul différentiel et intégral

Il n'y a pas lieu de reprendre la présentation des concepts de dérivée et d'intégrale, et aucune difficulté théorique ne doit être soulevée à ce sujet. L'interprétation géométrique du nombre dérivé en un point doit être connue des étudiants et la notion de coût marginal sera interprétée en termes de dérivation.
On consolidera et on approfondira les acquis de terminale technologique sur la pratique du calcul des dérivées et des primitives.
Dans le cas de deux variables t et x liées par une relation fonctionnelle $x = f(t)$, on introduira la notation différentielle $\mathrm{d}f = f'(t)\,\mathrm{d}t$; on donnera son interprétation graphique et on montrera l'intérêt de la différentielle pour les problèmes d'approximation. Aucune difficulté ne doit être soulevée sur le statut mathématique de la notion de différentielle.
Pour l'intégration, on se limitera, comme en terminale technologique, au cas de fonctions dérivables. Aucune théorie de la notion d'aire n'est au programme ; on admettra son existence et ses propriétés élémentaires.

a) Dérivées et intégrales.

- Étant donné un point a de I et une fonction f dérivable sur I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I prenant la valeur zéro au point a.
- Propriétés de l'intégrale :

Relation de Chasles.
Linéarité.

Positivité : si $a \le b$ et $f \ge 0$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \ge 0$; intégration d'une inégalité.

Inégalité de la moyenne : si $a \le b$ et $m \le f \le M$, alors $m(b-a) \le \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \le M(b-a)$.

Il conviendra d'interpréter, chaque fois qu'il est possible, ces propriétés en termes d'aire.

- Intégration par parties.
- Intégration par changement de variable du type $t \mapsto t + b$ ou $t \mapsto at$.

Tout autre changement de variable est hors programme.

- Exemples d'emploi du calcul intégral pour l'obtention de majorations et d'encadrements.

On se limitera à des exemples très simples et des indications pour l'encadrement de la fonction à intégrer devront être fournies.

b) Équations différentielles.

On s'attachera à relier les exemples étudiés avec les enseignements de l'économie en faisant ressortir l'importance de l'étude de phénomènes continus définis par une loi d'évolution et une condition initiale.

Résolution des équations linéaires du premier ordre à coefficients constants $a\,x'(t) + b\,x(t) = c(t)$ où a et b sont des réels et c une fonction dérivable à valeurs réelles.	

c) Notions sur les fonctions numériques de deux variables.

Aucune connaissance sur ce paragraphe n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques ; les notions qu'il contient sont à étudier en liaison étroite avec l'enseignement de l'économie et de la gestion. Elles portent principalement sur le calcul de dérivées partielles et de la dérivée d'une fonction définie par une équation implicite $f(x, y) = 0$. On donnera aussi la notation différentielle et son interprétation en termes d'effet sur la valeur d'une fonction de petits accroissements des variables.

3° Suites arithmétiques et suites géométriques

Les suites arithmétiques et les suites géométriques sont des outils indispensables pour l'étude de nombreux phénomènes discrets intervenant en économie et c'est à ce titre qu'elles font l'objet d'une consolidation des acquis et d'un approfondissement. Les suites considérées sont définies pour tout entier naturel.

Limite d'une suite géométrique $\left(k^n\right)$, où k est strictement positif.	Les énoncés concernant les opérations algébriques étant entièrement analogues pour les suites et les fonctions, il n'y a pas lieu de s'attarder au cas des suites ; ainsi, par exemple, on déduit immédiatement la limite d'une suite $\left(a\,k^n + b\right)$, où a, b et k sont des constantes ($k > 0$), de la limite de la suite $\left(k^n\right)$. Il s'agit, sans soulever de difficulté théorique, de pouvoir étudier et comparer, sur certains modèles mathématiques, la tendance à long terme d'un phénomène.

Travaux pratiques

1° Exemples d'emploi du calcul différentiel pour la recherche d'extremums, l'étude du sens de variation et le tracé des représentations graphiques des fonctions.	Les exemples seront issus, le plus souvent possible, de l'étude de phénomènes rencontrés en économie. On se limitera aux situations qui se ramènent au cas des fonctions d'une seule variable. Pour la détermination d'une fonction, on pourra être amené à résoudre un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss. Il convient de ne pas abuser des problèmes centrés sur l'étude traditionnelle de fonctions définies par une formule donnée *a priori*, dont on demande de tracer la courbe représentative. "Toute étude de branche infinie, notamment la mise en évidence d'asymptote, devra comporter des indications sur la méthode à suivre."
2° Exemples de recherche par approximation des solutions d'une équation numérique.	Sur des exemples, on mettra en œuvre quelques méthodes classiques : dichotomie, méthode de la corde (Lagrange), méthode de la tangente (Newton). Aucune connaissance spécifique sur celles-ci n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
3° Exemples de calcul d'intégrales à l'aide de primitives.	Les étudiants doivent savoir reconnaître si un exemple donné de fonction est de l'une des formes figurant au programme. Mis à part le cas de primitives de la forme précédente, tout calcul de primitive devra comporter des indications sur la méthode à suivre. On pourra montrer l'intérêt d'exploiter les propriétés des fonctions périodiques, des fonctions paires et des fonctions impaires.
4° Exemples de résolution d'équations différentielles linéaires du premier ordre.	Dans le cas d'un second membre non nul, toutes les indications permettant d'obtenir une solution particulière seront données. On insistera sur les exemples intervenant en économie et en démographie, et notamment sur le cas des phénomènes exponentiels continus, décrits par une équation du type $y' = ay$, où a est constant.
5° Exemples d'étude de situations conduisant à des suites arithmétiques ou géométriques.	On privilégiera les situations issues de la vie économique et sociale. En liaison avec l'économie et la gestion, on pourra être amené à étudier des situations conduisant à des suites définies par leur premier terme et une relation du type $u_{n+1} = a u_n + b$; mais toutes les indications utiles devront être fournies pour se ramener à l'étude d'une suite géométrique.

MODELISATION GEOMETRIQUE 1

Parmi les modèles mathématiques qui sont la base de la conception des courbes ou des surfaces en C.A.O. et en C.F.A.O. (Conception, Fabrication, Assistées par Ordinateur), le modèle de Bézier est un des plus utilisés. Il est le plus accessible pour une introduction à la modélisation interactive des formes.
L'étude de ce modèle, restreinte aux courbes du plan, est suffisante pour comprendre son intérêt.
Des présentations différentes permettront de dévoiler une partie de la « boîte noire » de ce modèle. L'appui sur des exemples de courbes de degré 2 ou 3 permet d'éviter une complexité calculatoire sans nuire aux utilisations réelles qui, souvent, concernent le degré 3.
L'objectif principal est la compréhension des liens entre ce modèle et la conception des formes. Il convient d'éviter les considérations théoriques hors de cet objectif.
L'étude des courbes définies par une représentation paramétrique sera développée dans ce contexte avec un paramètre variant dans l'intervalle [0 ; 1] et des fonctions polynomiales de degré 2 ou 3, l'étude du sens de variation de ces fonctions et de la tangente en un point d'une courbe.

Modèle de Bézier

L'ordre d'étude des différentes présentations est libre ; on fera les liaisons entre celles-ci.
Les propriétés issues du calcul barycentrique seront mises en évidence.

a) Présentation du modèle par vecteurs et contraintes.	
b) Présentation du modèle par points de définition et polynômes de Bernstein.	Certaines propriétés des polynômes de Bernstein seront étudiées pour prouver que la courbe de Bezier ne dépend pas du repère choisi et pour analyser la forme de la courbe.
c) Présentation du modèle par une suite de vecteurs. Construction géométrique d'un point de la courbe.	

<u>Travaux pratiques</u>

1° Exemples de courbes de Bézier définies par vecteurs et contraintes.	
2° Exemples de courbes de Bézier définies par points de définition et polynômes de Bernstein.	On pourra donner des exemples de passage du degré 2 au degré 3 en utilisant deux fois le point intermédiaire.
3° Exemples de courbes de Bézier définies par une suite de vecteurs.	
4° Exemples de formes réalisées par jonction d'arcs de courbes de Bézier.	Ce sera l'occasion de passer du modèle de Bézier qui déforme globalement l'arc à une utilisation où l'on peut modifier localement chaque arc.

MODELISATION GEOMETRIQUE 2

Parmi les modèles mathématiques qui sont la base de la conception des courbes ou des surfaces en C.A.O. et en C.F.A.O. (Conception, Fabrication, Assistées par Ordinateur), le modèle de Bézier et celui des B-Splines sont les plus utilisés.
L'étude du modèle de Bézier et une introduction à celui des B-Splines, restreintes aux courbes du plan, sont suffisantes pour comprendre l'intérêt de ces modèles dans la conception interactive des formes.
Des présentations différentes permettront de dévoiler une partie de la « boîte noire » de ces modèles. L'appui sur des exemples de courbes de degré 2 ou 3 permet d'éviter une complexité calculatoire, sans nuire aux utilisations réelles qui souvent concernent le degré 3.
L'objectif principal est la compréhension des liens entre ces modèles et la conception des formes. Il convient d'éviter les considérations théoriques hors de cet objectif.
Les courbes définies en coordonnées paramétriques seront développées dans ce contexte et dans le cadre d'étude suivant : paramètre variant dans un intervalle borné (par exemple [0 ; 1] pour le modèle de Bézier), fonctions polynomiales (degré 2 ou 3), variations, tangente en un point d'une courbe.

Modèle de Bézier

L'ordre d'étude des différentes présentations est libre ; on justifiera les liaisons entre celles-ci. Les différentes présentations feront l'objet d'une généralisation, mais celle des propriétés et des algorithmes sera limitée à leur énoncé sans justification.
Les propriétés issues du calcul barycentrique seront mises en évidence.

a) Présentation du modèle par vecteurs et contraintes.	Un algorithme sera proposé donnant l'arc de courbe joignant deux points lorsque les tangentes à la courbe en ces points sont données (degré 2 ou 3 seulement).
b) Présentation du modèle par points de définition et polynômes de Bernstein.	Certaines propriétés des polynômes de Bernstein seront étudiées pour prouver que la courbe de Bezier ne dépend pas du repère choisi et pour étudier la forme de la courbe.
c) Présentation du modèle par une suite de vecteurs. Algorithmes associés. Construction géométrique d'un point de la courbe.	Les algorithmes itératif et récursif seront explicités. La construction géométrique par barycentres successifs pourra, de plus, mettre en œuvre le tracé de la tangente en un point à la courbe (propriété admise)

Modèle B-Spline

Le lien avec le modèle de Bézier sera signalé sans justification. Il en sera de même pour les propriétés conduisant aux algorithmes et à la construction géométrique d'un point de la courbe. On mettra en évidence la capacité de ce modèle à traiter la possibilité de déformer localement la courbe B-Spline.

a) Présentation de courbes B-Splines obtenues à partir des polynômes de Riesenfeld et de points de définition (degré 2 ou 3).	La détermination de ces polynômes pourra être réalisée, mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
b) En utilisant la définition récursive de Cox et de De Boor, détermination de fonctions B-Splines à partir d'un vecteur nœud sans multiplicité puis de courbes B-Splines utilisant ces fonctions et des points de définition.	Dans le cas d'un vecteur nœud tel que (0,1,2,3), on déterminera les fonctions B-Splines ; sinon ces fonctions seront fournies.

Travaux pratiques

1° Exemples de courbes de Bézier définies par vecteurs et contraintes.	
2° Exemples de courbes de Bézier définies par points de définition et polynômes de Bernstein.	On pourra donner des exemples de passage du degré 2 au degré 3 en utilisant deux fois le point intermédiaire.
3° Exemples de courbes de Bézier définies par une suite de vecteurs.	
4° Exemples de formes réalisées par jonction d'arcs de courbes de Bézier.	Ce sera l'occasion de passer du modèle de Bézier qui déforme globalement l'arc à une utilisation où l'on peut modifier localement chaque arc.
5° Exemples de courbes B-Splines issues des polynômes de Riesenfeld.	
6° Exemples de courbes B-Splines issues de la définition récursive de Cox et de De Boor.	

CALCUL MATRICIEL

Il s'agit d'une initiation au langage matriciel, s'appuyant sur l'observation de certains phénomènes issus de la vie courante ou de l'économie. On cherche principalement à introduire un mode de représentation facilitant l'étude de tels phénomènes, sans qu'il soit utile de faire intervenir le concept d'application linéaire. On utilisera largement les moyens informatiques, les calculs à la main étant limités aux cas les plus élémentaires servant à introduire les opérations sur les matrices.

Matrices.	Une matrice est introduite comme un tableau de nombres permettant de représenter une situation comportant plusieurs "entrées" et "sorties".
Calcul matriciel élémentaire : addition, multiplication par un nombre, multiplication.	Le choix de la définition de chaque opération portant sur les matrices s'appuie sur l'observation de la signification du tableau de nombres ainsi obtenu.

<u>Travaux pratiques</u>

1° Calcul de sommes et de produits de matrices.	La notion de matrice inverse est hors programme.

ALGEBRE LINEAIRE

Il s'agit d'une initiation aux méthodes de l'algèbre linéaire : on vise d'abord une certaine aisance dans l'emploi du langage géométrique (vecteurs, applications linéaires) et du langage matriciel ; on vise aussi la pratique, sur des exemples simples, de la diagonalisation des matrices, afin de fournir aux étudiants des outils efficaces pour l'étude des phénomènes rencontrés en mécanique et en sciences physiques ou en économie. Pour le calcul matriciel, on utilisera largement les moyens informatiques, les calculs à la main étant limités aux cas les plus élémentaires servant à introduire les opérations sur les matrices.

a) $\mathbb{R}^n$, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Bases de $\mathbb{R}^n$; base canonique de $\mathbb{R}^n$. Applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. Algèbre $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.	On se limitera à des exemples où la dimension est petite ; aucune connaissance théorique sur le cas général n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques. L'étude des structures algébriques (groupes, anneaux, corps,...) n'est pas au programme ; il en est de même pour les notions générales d'espace vectoriel et d'algèbre. Les généralités sur l'algèbre linéaire doivent être réduites au minimum, et aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur ce chapitre.
b) Matrice associée à une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ relativement à des bases données. Algèbre $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées.	
c) Matrice associée à un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans une base, changement de base, matrices semblables. d) Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme ; définition des endomorphismes diagonalisables, interprétation matricielle. Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice.	La méthode mise en œuvre sera détaillée dans le cas où $n = 2$. On admettra sa généralisation et on utilisera les moyens informatiques pour obtenir les résultats cherchés. Aucune connaissance sur les méthodes de réduction des matrices non diagonalisables n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

Travaux pratiques

1° Détermination de la matrice associée à une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ relativement aux bases canoniques et détermination de l'image d'un vecteur par une application linéaire de matrice donnée.	
2° Exemples de diagonalisation d'une matrice.	On montrera l'intérêt de la diagonalisation pour la résolution de systèmes linéaires homogènes d'équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants et pour l'étude de systèmes de suites récurrentes dans des cas très simples.

STATISTIQUE DESCRIPTIVE

Il s'agit de consolider et d'approfondir les connaissances acquises les années antérieures.
On s'attachera, d'une part à étudier des situations issues de la technologie, d'autre part à relier cet enseignement à celui de l'économie et gestion.

a) Séries statistiques à une variable :
Méthodes de représentation.
Caractéristiques de position (médiane, moyenne).
Caractéristiques de dispersion (interquantiles, variance, écart type).

Il s'agit, d'une part de préciser la signification de chaque caractéristique, d'autre part d'associer la précision des résultats numériques obtenus (à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur) à la précision sur les données et à la méthode mise en œuvre, notamment dans le cas où les classes sont définies par des intervalles.

b) Séries statistiques à deux variables :
Tableaux d'effectifs.
Nuage de points ; point moyen.
Ajustement affine (méthode graphique ; méthode des moindres carrés, droites de régression).
Coefficient de corrélation linéaire.

Pour l'ajustement affine, on distinguera liaison entre deux variables statistiques et relation de cause à effet.
Pour la méthode des moindres carrés, on fera observer que l'on crée une dissymétrie entre les deux variables statistiques qui conduit, suivant le problème à résoudre, à privilégier l'une des deux droites.

<u>Travaux pratiques</u>

1° Étude de séries statistiques à une variable.

On interprétera les résultats obtenus.

2° Exemples d'étude de séries statistiques à deux variables.

En fournissant aux étudiants des indications sur la marche à suivre, on pourra, d'une part étudier quelques exemples d'ajustement qui, par un changement de variable simple, se ramènent à un ajustement affine, d'autre part, à propos des séries chronologiques, procéder à un lissage obtenu, par exemple, par la méthode des moyennes mobiles, avant d'effectuer, si nécessaire, un ajustement affine ;
mais aucune connaissance sur ces démarches n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques

CALCUL DES PROBABILITES 1

Il s'agit d'une initiation aux phénomènes aléatoires où toute ambition théorique et toute technicité sont exclues.
L'objectif est que les étudiants sachent traiter quelques problèmes simples concernant des variables aléatoires dont la loi figure au programme. Les sciences et techniques industrielles et économiques fournissent un large éventail de tels problèmes, que l'on pourra étudier en liaison avec les enseignements des disciplines professionnelles.

a) Probabilités sur les ensembles finis : Vocabulaire des événements, probabilité. Probabilité conditionnelle, événements indépendants. Cas d'équiprobabilité.	L'ensemble des événements sera pris égal à l'ensemble de toutes les parties de Ω.
Notation n!. Combinaisons.	Ces notions sont introduites pour présenter la loi binomiale. Les calculs de dénombrement ne sont pas un objectif du programme.
b) Variables aléatoires discrètes à valeurs réelles : Loi de probabilité. Espérance mathématique, variance, écart type. Loi binomiale, loi de Poisson.	Aucune difficulté théorique ne sera soulevée sur les variables aléatoires. On pourra utiliser la notation Σ, mais aucune connaissance à son sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
c) Variables aléatoires continues à valeurs réelles : Fonction de répartition et densité de probabilité. Espérance mathématique, variance, écart type. Loi normale.	On sera amené à utiliser les notations $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, mais aucune connaissance sur les intégrales impropres n'est exigible en calcul de probabilités.
d) Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.	Les résultats sont admis, mais l'outil informatique peut permettre des approches expérimentales. Aucune connaissance sur les critères d'approximation n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques. Les étudiants doivent savoir déterminer les paramètres. Il conviendra de mettre en évidence la raison d'être de la correction de continuité lors de l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale ; toutes les indications seront fournies.

Travaux pratiques

1° Calcul de probabilités portant sur l'union et sur l'intersection de deux événements.	On ne traitera que quelques exemples très simples de probabilité conditionnelle.
2° Étude de situations de probabilités faisant intervenir des variables aléatoires suivant une loi binomiale.	L'énoncé des critères permettant l'utilisation de la loi binomiale est exigible.
3° Exemples d'étude de situations de probabilités faisant intervenir des variables aléatoires suivant une loi de Poisson.	
4° Exemples d'étude de situations de probabilités faisant intervenir des variables aléatoires suivant une loi normale.	Aucune connaissance sur l'interpolation affine avec la table de la loi normale centrée réduite n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
5° Exemples d'étude de situations de probabilités faisant intervenir des variables aléatoires suivant une loi binomiale que l'on approche par une loi de Poisson ou une loi normale.	

CALCUL DES PROBABILITES 2

Il s'agit d'une initiation aux phénomènes aléatoires où toute ambition théorique et toute technicité sont exclues.
L'objectif est que les étudiants sachent traiter quelques problèmes simples concernant des variables aléatoires dont la loi figure au programme. Les sciences et techniques industrielles et économiques fournissent un large éventail de tels problèmes, que l'on pourra étudier en liaison avec les enseignements des disciplines professionnelles.

a) Probabilités sur les ensembles finis : Vocabulaire des événements, probabilité. Probabilité conditionnelle, événements indépendants. Cas d'équiprobabilité.	L'ensemble des événements sera pris égal à l'ensemble de toutes les parties de Ω.
Notation n!. Combinaisons.	Ces notions sont introduites pour présenter la loi binomiale. Les calculs de dénombrement ne sont pas un objectif du programme.
Loi faible des grands nombres.	Il s'agit de faire comprendre aux étudiants le lien entre statistiques et probabilités. Une approche expérimentale et un énoncé rudimentaire suffisent.
b) Variables aléatoires discrètes à valeurs réelles : Loi de probabilité. Espérance mathématique, variance, écart type. Indépendance de deux variables aléatoires.	Aucune difficulté théorique ne sera soulevée sur les variables aléatoires. On pourra utiliser la notation Σ, mais aucune connaissance à son sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
Espérance mathématique de $aX + b$, de $X + Y$ et de $X - Y$; variance de $aX + b$, de $X + Y$ et de $X - Y$ dans le cas où X et Y sont indépendantes. Loi binomiale, loi de Poisson.	
c) Variables aléatoires continues à valeurs réelles : Fonction de répartition et densité de probabilité. Espérance mathématique, variance, écart type. Loi normale.	L'exemple de la loi normale est suffisant. On pourra, en vue de l'étude de la fiabilité, présenter la loi exponentielle. On sera amené à utiliser les notations $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, mais aucune connaissance sur les intégrales impropres n'est exigible en calcul de probabilités.
Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois normales : • les variables $aX + b$, $X + Y$ et $X - Y$ suivent des lois normales ;	Le résultat est admis.
• formules donnant l'espérance mathématique et la variance de $aX + b$, de $X + Y$ et de $X - Y$, dans le cas où X et Y sont indépendantes.	Les formules sont admises.
d) Théorème de la limite centrée : approximation par une loi normale de la somme de n variables indépendantes, de même loi et de variance finie. Distribution d'échantillonnage asymptotique de la moyenne et de la fréquence empirique.	
e) Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.	Les résultats sont admis, mais l'outil informatique peut permettre des approches expérimentales. Aucune connaissance sur les critères d'approximation n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques. Les étudiants doivent savoir déterminer les paramètres. Il conviendra de mettre en évidence la raison d'être de la correction de continuité lors de l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale ; toutes les indications seront fournies.

Travaux pratiques

1° Calcul de probabilités portant sur l'union et sur l'intersection de deux événements.	On ne traitera que quelques exemples très simples de probabilités conditionnelles.
2° Étude de situations de probabilités faisant intervenir des variables aléatoires suivant une loi binomiale.	L'énoncé des critères permettant l'utilisation de la loi binomiale est exigible.
3° Exemples d'étude de situations de probabilités faisant intervenir des variables aléatoires suivant une loi de Poisson.	
4° Exemples d'étude de situations de probabilités faisant intervenir des variables aléatoires suivant une loi normale.	Aucune connaissance sur l'interpolation affine avec la table de la loi normale centrée réduite n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
5° Exemples d'étude de situations de probabilités faisant intervenir des variables aléatoires suivant une loi binomiale que l'on approche par une loi de Poisson ou une loi normale.	

STATISTIQUE INFÉRENTIELLE

Sous l'impulsion notamment du mouvement de la qualité, les méthodes statistiques sont aujourd'hui largement utilisées dans les milieux économique, social ou professionnel. Des procédures plus ou moins élaborées sont mises en œuvre, par exemple dans l'analyse des résultats d'expériences sur le vivant, les sondages, la maîtrise statistique des procédés, la fiabilité, les plans d'expériences. Des logiciels spécialisés exécutent automatiquement les calculs, suivant les normes AFNOR ou ISO.

Au-delà de l'exécution d'algorithmes ou de calculs dont le sens peut échapper, l'objectif essentiel de ce module est d'initier les étudiants, sur quelques cas simples, au raisonnement et méthodes statistiques et à l'interprétation des résultats obtenus.
Il s'agit de faire percevoir, à partir d'exemples figurant au programme, ce que sont les procédures de décision en univers aléatoire, ainsi que leur pertinence. Pour cela, la réalisation de simulations dans le cadre du modèle probabiliste de référence peut fournir un éclairage intéressant.
On soulignera que la validité d'une méthode statistique est liée à l'adéquation entre la réalité et le modèle la représentant.
On évitera les situations artificielles et on privilégiera les exemples issus de la vie économique et sociale ou du domaine professionnel, en liaison avec les enseignements d'autres disciplines ; dans le cadre de cette liaison, on pourra donner quelques exemples d'autres procédures que celles figurant au programme de mathématiques (par exemple utilisation de la droite de Henry, du test du χ^2, de la loi de Student), en privilégiant les aspects qualitatifs, mais aucune connaissance à leur sujet n'est exigible dans le cadre de ce programme.
On se placera dans le cadre d'échantillons considérés comme réalisations de variables aléatoires indépendantes.

a) Estimation ponctuelle d'un paramètre :
- fréquence ;
- moyenne et écart type.

Une illustration qualitative succincte des notions de biais et de convergence d'un estimateur peut être proposée, mais toute étude mathématique de ces qualités est hors programme.

b) Estimation par un intervalle de confiance d'un paramètre :
- fréquence dans le cas d'une loi binomiale approximable par une loi normale ;
- moyenne, dans le cas d'une loi normale quand son écart type est connu ou dans le cas de grands échantillons.

On distinguera confiance et probabilité :
- avant le tirage d'un échantillon, la procédure d'obtention de l'intervalle de confiance a une probabilité $1-\alpha$ que cet intervalle contienne le paramètre inconnu,
- après le tirage, le paramètre est dans l'intervalle calculé avec une confiance $1-\alpha$.

c) Tests d'hypothèse :
- relatifs à une fréquence p, dans le cas d'une loi binomiale approximable par une loi normale,
  - tester $p = p_0$ contre $p > p_0$, contre $p < p_0$;
  - tester $p = p_0$ contre $p \neq p_0$;
- relatifs à une moyenne m, dans le cas de la loi normale,
  - tester $m = m_0$ contre $m > m_0$, contre $m < m_0$;
  - tester $m = m_0$ contre $m \neq m_0$;
- comparaison de deux proportions ou de deux moyennes.

La taille n de l'échantillon sera suffisamment grande ($n \geq 30$).
On soulignera que la décision prise, rejet ou acceptation, dépend des choix faits *a priori* par l'utilisateur : choix de l'hypothèse nulle, choix du seuil de signification.

Travaux pratiques

1° Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance de la fréquence, dans le cas d'une loi binomiale connue, à partir d'échantillons simulés.	La connaissance *a priori* de la loi sous-jacente permet de comparer le paramètre réel et les estimations obtenues à partir des échantillons. Aucune connaissance sur ce TP n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
2° Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance de fréquences. Estimation ponctuelle de moyennes, d'écarts types et estimation par intervalle de confiance de moyennes, dans des situations relevant de la loi normale.	Quand n est grand, le théorème de la limite centrée étend la procédure mise au point pour les échantillons gaussiens à des cas plus généraux.
3° Construction et utilisation de tests : - unilatéraux et bilatéraux relatifs à une fréquence ; - unilatéraux et bilatéraux relatifs à une moyenne dans des situations relevant de la loi normale.	La construction d'un test comporte le choix des hypothèses nulle et alternative, la détermination de la région critique et l'énoncé de la règle de décision.
4° Construction et utilisation de tests de comparaison de deux proportions ou de deux moyennes.	Cette comparaison peut permettre, par exemple, d'apprécier une éventuelle amélioration dans un processus de fabrication.
5° Exemples d'utilisation de la droite de Henry, du test du χ^2, du test de Student (cas des petits échantillons).	Ce TP n'est à réaliser, en entier ou en partie, qu'en liaison avec les enseignants des disciplines professionnelles et seulement si, dans celles-ci, ces procédures sont utilisées. Aucune connaissance à son sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

FIABILITÉ

Sous l'impulsion notamment du mouvement de la qualité, les méthodes statistiques sont aujourd'hui largement utilisées dans les milieux économique, social ou professionnel. Des procédures plus ou moins élaborées sont mises en œuvre, par exemple dans l'analyse des résultats d'expériences sur le vivant, les sondages, la maîtrise statistique des procédés, la fiabilité, les plans d'expériences. Des logiciels spécialisés exécutent automatiquement les calculs, suivant les normes AFNOR ou ISO.

L'objectif essentiel de ce module, au-delà de l'exécution des algorithmes ou des calculs correspondants, est d'amener les étudiants à prendre du recul vis-à-vis des méthodes utilisées.
On évitera les situations artificielles et on privilégiera les exemples issus du domaine professionnel, en liaison avec les enseignements d'autres disciplines.

a) Notions de fonction de fiabilité, de fonction de défaillance, de taux d'avarie (ou de mort), moyenne des temps de bon fonctionnement (MTBF).	La MTBF est définie comme l'espérance mathématique de la durée de vie.
b) Loi exponentielle.	
c) Loi de Weibull.	

Travaux pratiques

1° Exemples d'étude de fiabilité et d'estimation de paramètres dans le cas de la loi exponentielle. Représentation des données en utilisant le papier semi-logarithmique.	
2° Exemples d'étude de fiabilité et d'estimation de paramètres dans le cas de la loi de Weibull.	On montrera que l'utilisation de papier de Weibull permet d'obtenir une estimation des paramètres de cette loi, à partir de la fonction de répartition empirique. (L'utilisation de logiciels *ad hoc* donne directement une estimation optimale des mêmes paramètres et permet, en outre, d'obtenir un intervalle de confiance). Le problème de l'adéquation de données empiriques à un modèle est hors programme.
3° Exemples d'étude de la disponibilité d'un système où le taux de défaillance et le taux de réparation sont constants.	Ce TP n'est à réaliser, en entier ou en partie, qu'en liaison avec les enseignants des disciplines professionnelles et seulement si, dans celles-ci, ces procédures sont utilisées. Aucune connaissance à son sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

PLANS D'EXPÉRIENCE

La technique des plans d'expérience est devenue d'usage courant dans la mise en place des procédés industriels. Les enseignements professionnels font souvent référence à la méthode Taguchi.

En mathématiques, l'objectif de ce module est de montrer aux étudiants la nécessité de planifier les expériences et de leur permettre d'appréhender la démarche mise en œuvre afin d'obtenir une estimation optimale des paramètres inconnus, quand les mesures faites ont un caractère aléatoire.
On montrera également l'importance du modèle *a priori*.
On évitera les situations artificielles et on s'appuiera sur des exemples issus du domaine professionnel, en liaison avec les enseignements des disciplines correspondantes.

a) Plan factoriel à deux ou à trois facteurs, chacun à deux niveaux :
définition des actions principales, des interactions ;
notion de degré de liberté.

L'utilisation des méthodes de l'algèbre linéaire est hors programme.
En liaison avec les enseignements des disciplines professionnelles, si le besoin apparaît, on abordera la notion de plan fractionnaire, mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

Matrice d'expérience, estimation ponctuelle des paramètres du modèle (effets principaux, éventuellement interaction).

On indiquera la méthode de construction de la matrice d'expérience selon l'algorithme de Yates.

b) Intervalle de confiance pour les estimations des paramètres du modèle quand l'écart type des mesures expérimentales est connu, dans des situations relevant de la loi normale.

Sur des exemples simples, on montrera quelles sont les conditions pour que l'écart type puisse être estimé quand il est inconnu ; on pourra alors être amené à utiliser la loi de Student, mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

c) Test sur la signification d'un facteur, dans les conditions précédentes.

Travaux pratiques

1° Exemples de mise en œuvre de plans d'expérience.

On utilisera dans la mesure du possible les situations que les étudiants peuvent rencontrer lors de leurs périodes de formation en entreprise.

CALCUL VECTORIEL

L'objectif est de consolider et de développer certains acquis de terminale technologique concernant le calcul vectoriel.

Vecteurs (position, vitesse, accélération, force).
Barycentres (centres d'inertie).
Produit scalaire (longueurs, angles, puissance, travail).
Produit vectoriel (aires, angles, moments cinétique et dynamique, moment d'une force en un point).
Produit mixte (volumes, moment d'une force par rapport à un axe).

On soulignera le lien avec les concepts correspondants en sciences physiques et en mécanique, mais aucune connaissance en cinématique ou en dynamique n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
En outre, on pourra être amené à donner quelques notions sur les vecteurs glissants et sur les torseurs, mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

CONFIGURATIONS GEOMETRIQUES

Les seules connaissances exigibles des étudiants sont celles figurant dans les programmes de Seconde, Première STI et Terminale STI ou de Première et Terminale conduisant aux brevets de technicien préparés après la seconde de détermination.
L'objectif est de mettre en œuvre et de compléter cet acquis à partir de problèmes privilégiant les situations rencontrées dans les autres enseignements : analyse de la forme d'un objet usuel de l'espace (par projection ou famille de sections planes), modes de génération de tels objets (surfaces de révolution,...), calculs de distances, d'angles, d'aires, de volumes, problèmes d'optimisation,... sur ces objets.
On fera la liaison avec les enseignements technologiques mettant en œuvre des logiciels de conception assistée par ordinateur (CAO).

Travaux pratiques

1° Exemples d'étude de problèmes portant sur les objets usuels du plan et de l'espace.	Les sciences et techniques industrielles fournissent un large éventail de tels problèmes, et on évitera les situations artificielles.