Probabilités

1 Probabilités sur un ensemble fini

Définition 1 On appelle univers des possibles, et on note Ω, l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ (expérience dont on ne peut prédire à l'avance le résultat). Un élément de Ω est appelé événement élémentaire.

Définition 2 Un événement est un sous-ensemble (ou partie) de Ω.
L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω est l'ensemble des événements liés à l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$.

Remarque 1 Ω est l'événement certain. Il est toujours réalisé.
$\varnothing$ est l'événement impossible. Il n'est jamais réalisé.

Définition 3 L'événement (A ou B) noté $A \cup B$ est composé des événements élémentaires appartenant à A ou à B ou aux deux.

Définition 4 L'événement (A et B) noté $A \cap B$ est composé des événements élémentaires appartenant à la fois à A et à B.

Définition 5 L'événement contraire de A, noté $\bar{A}$, est composé des événements élémentaires qui n'appartiennent pas à A.

Définition 6 Deux événements A et B sont dits incompatibles (ou disjoints) si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

Remarque 2 Ω est réunion disjointe de tous les événements élémentaires.

Fréquence d'un événement :
Soit A un événement lié à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$.
Répétons n fois cette expérience. Soit n_A le nombre de réalisations de A lors de ces n répétitions. La fréquence de A est $f_n(A) = \dfrac{n_A}{n}$. L'expérience montre que lorsque n devient de plus en plus grand, $f_n(A)$ tend à se stabiliser autour d'un nombre p. Ce nombre p s'appelle alors probabilité de l'événement A et se note $P(A)$.
Propriétés des fréquences *(qui conduisent à la définition 7) :*

1. $f_n(\Omega) = 1$ car Ω étant toujours réalisé : $n_\Omega = n$
2. $f_n(A) \in [0; 1]$ car $0 \leq n_A \leq n$
3. Si A et B sont incompatibles, $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$ car $n_{A\cup B} = n_A + n_B$.

Définition 7 On appelle probabilité toute application de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

1. $\boxed{\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) : 0 \leq P(A) \leq 1}$
2. $\boxed{A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$
3. $\boxed{P(\Omega) = 1}$

Proposition 1 $\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$ et $\boxed{P(\varnothing) = 0}$

Démonstration.
$A \cap \bar{A} = \varnothing \Rightarrow P\left(A \cup \bar{A}\right) = P(A) + P\left(\bar{A}\right) \Rightarrow P(\Omega) = P(A) + P\left(\bar{A}\right) \Rightarrow 1 = P(A) + P\left(\bar{A}\right)$
$\varnothing = \bar{\Omega} \Rightarrow P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 0$

Théorème 1 Pour tout événement A et tout événement B : $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Démonstration. La disposition sous forme de tableau est très pratique

$A \cap B$	$\bar{A} \cap B$	B
$A \cap \bar{B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$	$\bar{B}$
A	$\bar{A}$	

La première colonne du tableau représente l'événement A
La première ligne du tableau représente l'événement B
Le tableau entier représente Ω

$A \cup B$ est réunion disjointe de A et $\left(\bar{A} \cap B\right)$

donc $P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(\bar{A} \cap B\right)$

B est réunion disjointe de $\left(A \cap B\right)$ et $\left(\bar{A} \cap B\right)$

donc $P\left(B\right) = P\left(A \cap B\right) + P\left(\bar{A} \cap B\right)$ d'où $P\left(\bar{A} \cap B\right) = P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right)$.

D'où le résultat.

Définition 8 On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires de Ω ont la même probabilité.
C'est la cas lorsqu'on effectue un tirage au hasard ou lorsqu'on lance une pièce ou un dé bien équilibré.

Théorème 2 S'il y a équiprobabilité : $P(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de } A}{\text{nombre de cas possibles}}$

Démonstration. Si $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n\}$: $P\left(\Omega\right) = P\left(\omega_1\right) + P\left(\omega_2\right) + \cdots + P\left(\omega_n\right)$.
$P\left(\omega_1\right) = P\left(\omega_2\right) = \cdots = P\left(\omega_n\right) = p \Rightarrow 1 = np$ d'où $p = \dfrac{1}{n}$
Si $A = \{\omega_{A_1}; \omega_{A_2}; \ldots; \omega_{A_k}\}$ alors $P\left(A\right) = P\left(\omega_{A_1}\right) + P\left(\omega_{A_2}\right) + P\left(\omega_{A_k}\right) = kp = \dfrac{k}{n}$

2 Probabilités conditionnelles

2.1 Définition

Définition 9 Soit B un événement de probabilité non nulle d'un univers Ω. Soit A un événement quelconque de Ω. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé et on note $P(A/B)$ le nombre défini par $\boxed{P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}}$

Remarque 3 De cette formule on déduit $\boxed{P(A \cap B) = P(A/B).P(B) = P(B/A).P(A)}$

Théorème 3 $\boxed{P(A \cup B/C) = P(A/C) + P(B/C) - P(A \cap B/C)}$

Théorème 4 $\boxed{P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)}$

2.2 Événements indépendants

Définition 10 Deux événements A et B sont dits **indépendants** si et seulement si

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$$

Remarque 4 Si A et B sont indépendants et de probabilités non nulles :

$$P(A/B) = P(A) \text{ et } P(B/A) = P(B)$$

Proposition 2 $\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont indépendants, alors } \bar{A} \text{ et } B \text{ sont indépendants}}$

Remarque 5 L'application répétée de ce dernier résultat montre que si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$ sont indépendants de même que $\bar{A}$ et $\bar{B}$.