Lois de probabilité

1 Variable aléatoire

Définition 1 On appelle variable aléatoire (ou aléa) définie sur un univers Ω toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$. Si $X(\Omega)$ comporte un nombre fini de valeurs on dit que X est discrète et si $X(\Omega) = I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que X est continue.

Notations :
- $(X = \alpha) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = \alpha\}$
- $(X \leq \alpha) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leq \alpha\}$
- $(a < X \leq b) = \{\omega \in \Omega \ / \ a < X(\omega) \leq b\}$
- etc...

Remarque 1 Si $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ alors Ω est la réunion disjointe des événements $(X = x_k)$.
On en déduit $P(\Omega) = \sum_{k=1}^{n} P(X = x_k)$ et donc $\sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) = 1$.

2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Définition 2 On appelle loi de probabilité (ou distribution) de la variable aléatoire discrète X définie sur l'univers Ω l'application de $X(\Omega)$ dans $[0; 1]$ qui à chaque valeur x_k de $X(\Omega)$ fait correspondre la probabilité de l'événement $(X = x_k)$.

Remarque 2 La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X se présente généralement sous la forme d'un tableau de valeurs et se représente à l'aide d'un diagramme en bâtons ou d'un histogramme.

Exemple 1 Un dé équilibré comporte une face numérotée 1, deux faces numérotées 2 et trois faces numérotées 3. On note X la variable aléatoire qui, à tout lancer du dé, associe le numéro situé sur la face supérieure. La loi de X est :

k	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

On vérifie que $\sum_{k=1}^{n} P(X = k) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$

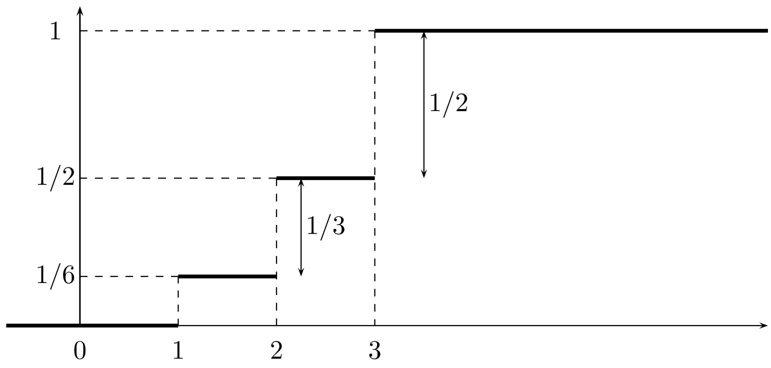
Définition 3 On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X définie sur l'univers Ω l'application $F : \mathbb{R} \to [0; 1]$ définie par : $\boxed{F(x) = P(X \leq x)}$

Remarque 3 F est une fonction croissante et $\boxed{P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)}$

Remarque 4 Si $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ avec $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ alors :
- $F(x) = \sum_{x_k \leq x} P(X = x_k)$. Par exemple, si $x_2 \leq x < x_3$: $F(x) = P(X = x_1) + P(X = x_2)$
- Si $x < x_1$ on a $F(x) = 0$
- Si $x \geq x_n$ on a $F(x_n) = 1$
- F est constante sur chaque intervalle $[x_k; x_{k+1}[$. C'est une fonction en escalier dont la représentation graphique présente un saut au point d'abscisse x_k de valeur $P(X = x_k)$.

Exemple 2 Reprenant l'exemple précédent, la fonction de répartition de X a pour représentation :

Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiff



3 Espérance mathématique ; Variance ; Ecart-type

Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire et soit Ω l'univers des possibles. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω telle que $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$.

Définition 4 On appelle espérance de X et on note $E(X)$ le nombre défini par

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)$$

Remarque 5 $E(X)$ représente la limite, lorsque n tend vers l'infini, de la moyenne des valeurs prises par X à l'issue de n répétitions de $\mathcal{E}$.

Théorème 1 Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur Ω et si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \quad ; \quad E(\lambda X) = \lambda E(X) \quad ; \quad E(X+\lambda) = E(X) + \lambda$$

Corollaire 1 Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur Ω : $E\left(X - Y\right) = E\left(X\right) - E\left(Y\right)$

Définition 5 On appelle variance de X et on note $V(X)$ ou $\sigma^2(X)$ le nombre défini par

$$\sigma^2(X) = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - E(X)\right)^2 P(X = x_k)$$

Définition 6 L'écart-type de X, noté $\sigma(X)$, est défini par : $\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}$

Théorème 2 $\sigma^2(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \left(E\left(X - E(X)\right)\right)^2$

Théorème 3 Si X est une variable aléatoire définie sur l'univers Ω et si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\sigma^2(X+\lambda) = \sigma^2(X) \quad ; \quad \sigma^2(\lambda.X) = \lambda^2.\sigma^2(X) \quad ; \quad \sigma^2\left(X+\lambda\right) = \sigma^2\left(X\right)$$

Remarque 6 En général, on n'a pas $\sigma^2(X+Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$.

4 Loi binômiale

Théorème 4 Soit $\mathcal{E}$ une épreuve aléatoire n'ayant que 2 issues possibles : La réalisation d'un événement A avec une probabilité p et sa non réalisation avec une probabilité q ($q = 1 - p$). Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de réalisations de A à l'issue de n répétitions de $\mathcal{E}$. Si les n épreuves sont **indépendantes**, alors : $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

Remarque 7 Des épreuves indépendantes sont des épreuves où la probabilité p de réalisation d'un événement A est la même à chaque épreuve.
Par exemple, si on effectue n tirages avec remise, on effectue n épreuves indépendantes.
Autre exemple : Si un atelier comporte n machines identiques, le fonctionnement de chaque machine doit être considéré comme une épreuve. Le fonctionnement des n machines constitue donc n épreuves indépendantes.

Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiff

Définition 7 On dit qu'une variable aléatoire X définie sur Ω suit la loi binômiale de paramètres n et p si on a $X(\Omega) = \{0; 1; 2; \ldots; n\}$ et si $\forall k \in \{0; 1; 2; \ldots; n\}$: $\boxed{P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$ On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$

Théorème 5 $\boxed{\text{Si } \; X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p) \quad E(X) = np \;\text{ et }\; \sigma^2(X) = np(1-p) = npq}$

5 Loi de Poisson

Si on pose $p = \dfrac{\lambda}{n}$ et si on fait tendre n vers $+\infty$, on montre que $C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \to \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Définition 8 Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre λ, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, si et seulement si :

$$\forall k \in \mathbb{N} : \boxed{P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$$

Remarque 8 Il existe pour certaines valeurs de λ une table donnant les valeurs de $P(X = k)$

Théorème 6 Si n est grand et p petit on montre que $\mathcal{B}(n;p) \simeq \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np$
Dans la pratique l'approximation est satisfaisante dès que $n > 30$ et $p < 0,1$

Théorème 7 $\boxed{\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) : \quad E(X) = \lambda \text{ et } \sigma^2(X) = \lambda}$

6 Loi normale

6.1 Variable aléatoire continue

La loi de probabilité d'une variable aléatoire continue est donnée par sa fonction de répartition.
Si F est dérivable de dérivée f, alors : $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt.$
On a alors : $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad et \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
f s'appelle alors densité de probabilité de la variable aléatoire X.

Proposition 1 Pour qu'une fonction f soit densité de probabilité d'une variable aléatoire X, il faut et il suffit que :

1. $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$ (F étant croissante, sa dérivée est positive)
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

Remarque 9 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall h > 0$, $(X = \alpha) \subset (\alpha - h < X \leq \alpha + h)$.
Donc : $\forall \alpha \in \mathbb{R} : P(X = \alpha) \leq P(\alpha - h < X \leq \alpha + h) = F(\alpha + h) - F(\alpha - h)$.
F étant dérivable est continue et donc $\lim\limits_{h \to 0} F(\alpha + h) = \lim\limits_{h \to 0} F(\alpha - h) = F(\alpha)$.
D'où : $\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R} : P(X = \alpha) = 0}$

Interprétation géométrique : $F(t)$ est l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la densité f, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = t$.

Définition 9 Si X est une variable aléatoire continue de densité de probabilité f, on appelle espérance de X et on note $E(X)$ le nombre : $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx$. On définit de même la variance et l'écart-type de X par les formules suivantes :
$\sigma^2(X) = E\left[(X - E(X))\right]^2 = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$ avec $E(X^2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$

Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiff

6.2 Loi normale

Définition 10 On appelle loi normale ou loi de Laplace-Gauss la loi d'une variable aléatoire continue X de densité de probabilité $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m;\sigma)$

Théorème 8 Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m;\sigma)$ $\boxed{E(X) = m \text{ et } \sigma(X) = \sigma}$

Théorème 9 La loi normale centrée réduite est la loi $\mathcal{N}(0;1)$. Elle a pour densité $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Théorème 10 $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}(m;\sigma) \Leftrightarrow T = \dfrac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)}$

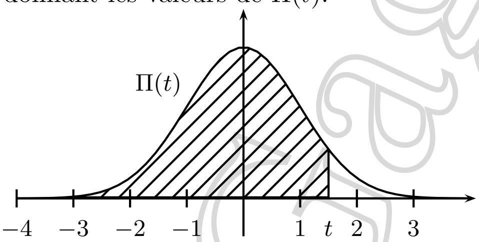
La fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$ se note Π.
On a donc, si $T \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$: $\boxed{\Pi(t) = P(T \leq t)}$.

Remarque 10 $\Pi(t) = P(T \leq t) = P(T < t)$ car T étant normale : $P(T = t) = 0$

Π étant une fonction de répartition : Si $T \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$: $\boxed{P(a < T \leq b) = \Pi(b) - \Pi(a)}$

Remarque 11 Si $T \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$: $P(a < T \leq b) = P(a < T < b) = P(a \leq T \leq b) = P(a \leq T < b)$

Le formulaire fournit une table donnant les valeurs de $\Pi(t)$.



La courbe représentative de φ est symétrique par rapport à Oy
On a donc : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} : \Pi(-t) = 1 - \Pi(t)}$. En particulier : $\Pi(0) = \dfrac{1}{2}$
Nous avons également le résultat suivant : Si $T \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$: $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+ : P(-t < T < t) = 2\Pi(t) - 1}$

7 Variables aléatoires indépendantes

Définition 11 Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ et soit Y une variable aléatoire discrète telle que $Y(\Omega) = \{y_1; y_2; \ldots; y_p\}$. On dit que X et Y sont indépendantes si et seulement si $\forall i \in \{1; 2; \cdots; n\}$ et $\forall j \in \{1; 2; \cdots; p\}$ on a

$$P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i) . P(Y = y_j)$$

On étend cette définition à des variables aléatoires continues X et Y de la façon suivante :
Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ et tout intervalle J de $\mathbb{R}$: $P[(X \in I) \cap (Y \in J)] = P(X \in I) . P(Y \in J)$

Théorème 11 Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes :**

$$E(XY) = E(X) E(Y) \text{ et } \sigma^2(X+Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$$

Corollaire 2 Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes :** $\sigma^2(X-Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$

Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiff

7.1 Variable aléatoire de Bernoulli.

On effectue un tirage et on s'intéresse à la réalisation d'un événement A.
Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur 1 si A est réalisé et pour valeur 0 sinon.

Si on note $p = P(A)$, la loi de X est :

k	0	1
$P(X = k)$	$1 - p$	p

.

D'où $E(X) = p$ et $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.
X s'appelle variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p.
On effectue n tirages avec remise identiques au tirage précédent définissant ainsi n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ indépendantes et de même loi que X.
Alors : Si $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, S_n prend pour valeurs le nombre de réalisations de A à l'issue des n tirages. Donc $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$.
Une variable aléatoire binômiale de paramètres n et p **est la somme de** n **variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre** p.

7.2 Lois de Poisson

Théorème 12 Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, si $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ et si X et Y sont **indépendantes** : $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

7.3 Lois normales

Théorème 13 Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1;\sigma_1)$, si $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_2;\sigma_2)$ et si X_1 et X_2 sont **indépendantes :**

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu_1 + \mu_2; \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$$

Corollaire 3 Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1;\sigma_1)$, si $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_2;\sigma_2)$ et si X_1 et X_2 sont **indépendantes :**

$$X_1 - X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu_1 - \mu_2; \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$$

Théorème 14 (Limite central) Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi de probabilité d'espérance μ et d'écart-type σ, alors, lorsque n est suffisamment grand, la loi de la variable aléatoire

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

peut être approchée par une loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Remarque 12 Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et normales d'espérance μ et d'écart-type σ, $\bar{X}_n$ suit exactement la loi $\mathcal{N}\left(\mu; \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Théorème 15 Si n est suffisamment grand : $\mathcal{B}(n;p) \simeq \mathcal{N}\left(np; \sqrt{np(1-p)}\right)$.

Démonstration. Provient du fait qu'une variable aléatoire binômiale de paramètres n et p est la somme de n variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre p.
Dans la pratique, l'approximation est satisfaisante dès que np et $n(1-p)$ sont supérieurs à 15.
Il convient cependant d'effectuer une **correction de continuité** qui consiste à remplacer tout entier k par l'intervalle $\left[k - \dfrac{1}{2}; k + \dfrac{1}{2}\right]$.

Exemple 3 $\mathcal{B}\left(100; \dfrac{1}{2}\right) \simeq \mathcal{N}(50;5)$. Notons $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(100; \dfrac{1}{2}\right)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(50;5)$. Alors :
$P(X = k) \simeq P\left(k - \dfrac{1}{2} \leq Y \leq k + \dfrac{1}{2}\right)$; $P(X = 50) \simeq P(49,5 \leq Y \leq 50,5)$
$P(40 \leq X \leq 60) \simeq P(39,5 \leq Y \leq 60,5)$; $P(45 < X < 55) \simeq P(45,5 \leq Y \leq 54,5)$ etc.. . .

Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiff