Explications sur la décomposition d'une fraction de polynômes en éléments simples du 1ier ordre

c'est-à-dire dans $\mathbb{C}$: Application au calcul de la fonction « originale » d'une transformée de Laplace.

Contexte mathématique :

L'ensemble des polynômes à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[X]$

L'ensemble des polynômes à coefficients complexes est noté $\mathbb{C}[X]$

Ces explications sont dans le cadre du chapitre «**Transformation de Laplace**», nous allons uniquement évoquer le cas de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ (qui inclut le cas des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ en les considérant avec $X \in \mathbb{C}$)

Ce document explique uniquement la décomposition d'une fraction en éléments simples du 1ier ordre

A) Factorisation

Factorisation : Exemple n°1 : Résoudre et factoriser $x^2 + x + 1 = 0$

Calcul du discriminant Δ de cette équation : $\Delta = b^2 - 4ac = -3$ car $a = 1$ et $b = 1$ et $c = 1$

Comme $\Delta = -3 < 0$ pour trouver les 2 solutions complexes de cette équation, on pose $\Delta = \delta^2 = 3i^2$ et on trouve $\delta = i\sqrt{3}$

Les **2 solutions** x_1 et x_2 de l'équation sont les 2 nombres conjugués dans $\mathbb{C}$: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a} = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a} = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \overline{x_1} \end{cases}$

- On obtient : $x^2 + x + 1 = 0 = (x - x_1)(x - x_2)$ (*expression factorisée*)

Factorisation : Exemple n°2 : Résoudre et factoriser dans $\mathbb{C}$: $x^3 = 1$ c'est-à-dire $x^3 - 1 = 0$

Comme $x = 1$ est une racine évidente de cette équation on peut poser : $x^3 - 1 = (x-1)\left(ax^2 + bx + c\right)$

Par « identification » , on trouve que $a = 1$ et $b = 1$ et $c = 1$ et on obtient : $x^3 - 1 = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right)$

ET d'après l'exemple n°1 on peut conclure que l'équation $x^3 - 1 = 0$ a **3 solutions** qui sont : $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = \dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \overline{x_1} \end{cases}$

- On obtient : $x^3 - 1 = (x-1)(x - x_1)(x - x_2)$ (*expression factorisée*)

Factorisation : Exemple n°3 : Résoudre et factoriser dans $\mathbb{C}$: $x^4 + 1 = 0$

Cherchons les solutions de l'équation $x^4 = -1$ sous la forme $x = |x| e^{i\arg(x)}$ Comme $-1 = e^{i\pi}$, on a donc

$$x^4 = -1 \Leftrightarrow \left(|x| e^{i\,arg(x)}\right)^4 = e^{i\pi} \Leftrightarrow |x|^4 e^{i4\,arg(x)} = e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|^4 = 1 \\ 4\,arg(x) = \pi + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 1 \\ arg(x) = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

On peut conclure que l'équation $x^4 + 1 = 0$ **a 4 solutions dans** $\mathbb{C}$ qui sont :

$$\begin{cases} k = 0 \Rightarrow x_0 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} & & \Rightarrow x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ k = 1 \Rightarrow x_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} & \Rightarrow x_1 = e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} & \Rightarrow x_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ k = 2 \Rightarrow x_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)} & \Rightarrow x_3 = e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)} & \Rightarrow x_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \overline{x_1} \\ k = 3 \Rightarrow x_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)} & \Rightarrow x_4 = e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)} & \Rightarrow x_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \overline{x_0} \end{cases}$$

- On obtient : $x^4 + 1 = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ (*expression factorisée*)

Factorisation : Exemple n°4 : Résoudre et factoriser dans $\mathbb{C}$: $x^6 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(x^4+1\right) = 0$

D'après l'exemple n°3, on peut conclure que cette équation a **5 solutions** qui sont x_0, x_1, x_2, x_3 et $x_4 = 0$

- On obtient : $x^6 + x^2 = (x-0)^2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ (*expression factorisée*)

B) Notion de fraction rationnelle de 2 polynômes

On appelle fraction rationnelle toute fonction ***f*** définie par une relation de la forme $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

où **P** et **Q** sont des 2 polynômes de $\mathbb{R}[X]$ ou de $C[X]$ (et qui est définie quand $Q(x) \neq 0$)

Remarque : Pour décomposer une fraction rationnelle en éléments simples quand on a $\deg(P) \geq \deg(Q)$, il est nécessaire de faire au préalable **une division euclidienne** (*voir explications ci-dessous*) pour calculer « ***la partie entière et le reste*** »

C) Notion de division euclidienne de 2 polynômes

(K représente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Soit **P** et **Q** 2 polynômes de $K[X]$, il existe un unique couple (**E** , **R**) de polynômes de $K[X]$ tel que :

P = EQ + R avec $\deg(R) < \deg(Q)$ (*algorithme analogue à la division euclidienne dans l'ensemble* $\mathbb{N}$ *des entiers naturels*)

Exemple : Effectuons la division euclidienne de $P(x) = -5x^5 + 2x^3 - x^2 + x - 1$ par $Q(x) = x^3 + 5x^2 + 5x - 5$

Division euclidienne posée

P=	$-5x^5$		$+2x^3$	$-x^2$	$+x$	-1	$Q=x^3+5x^2+5x-5$
$+5x^2$ Q	$+5x^5$	$+25x^4$	$+25x^3$	$-25x^2$			$E=-5x^2+25x-98$
=		$+25x^4$	$+27x^3$	$-26x^2$	$+x$	-1	
$-25x$ Q		$-25x^4$	$-125x^3$	$-125x^2$	$+125x$		
=			$-98x^3$	$-151x^2$	$+126x$	-1	
$+98$ Q			$+98x^3$	$+490x^2$	$+490x$	-490	
R=				$+339x^2$	$+616x$	-491	

On obtient :

$$-5x^5+2x^3-x^2+x-1 = (-5x^2+25x-98)(x^3+5x^2+5x-5) + 339x^2+616x-491$$

c'est-à-dire: si $Q(x) \neq 0$: $f(x) = \dfrac{-5x^5+2x^3-x^2+x-1}{x^3+5x^2+5x-5} = -5x^2+25x-98+\dfrac{339x^2+616x-491}{x^3+5x^2+5x-5}$

Conclusion : **P = EQ + R** avec $\deg(R) < \deg(Q)$ et on obtient $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$ quand $Q(x) \neq 0$

ET on peut alors décomposer en éléments simples la fraction $g(x) = \dfrac{R(x)}{Q(x)}$ après avoir factorisé le polynôme Q

D) Décomposition en éléments simples du 1ier ordre de la fraction : $g(x) = \dfrac{R(x)}{Q(x)}$ avec $\deg(R) < \deg(Q)$

Si $\deg(Q) = N$, par factorisation on peut écrire que : $Q(x) = (x-x_1)^{n1}(x-x_2)^{n2}\,.......(x-x_p)^{np}$

avec $x_1, x_2, ..., x_p \in \mathbb{C}$ ou à $\mathbb{R}$ et avec $n_1 + n_2 + ... + n_p = N$

La décomposition en éléments simples du 1ier ordre est :

$$g(x) = \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{a}{(x-x_1)} + \frac{b}{(x-x_1)^2} + ... + \frac{c}{(x-x_1)^{n1}} + \frac{d}{(x-x_2)} + \frac{e}{(x-x_2)^2} + ... + \frac{f}{(x-x_2)^{n2}} + ...$$

où ***a, b, … c ,… f, …*** sont des nombres complexes (*il existe différentes techniques pour trouver la valeur de ces nombres…..)*

Exemple

$Y(p)=\dfrac{2}{\left(p^2+4\right)^2}$ Comme $\left(p^2+4\right)^2=\left(p^2-4i^2\right)^2=\left(p^2-(2i)^2\right)^2=\left((p+2i)(p-2i)\right)^2=(p+2i)^2(p-2i)^2$

Puis on doit calculer les nombres complexes ***a***,***b***,***c*** et ***d*** tels

que $Y(p)=\dfrac{a}{(p+2i)}+\dfrac{b}{(p+2i)^2}+\dfrac{c}{(p-2i)}+\dfrac{d}{(p-2i)^2}$

E) ***Application*** : Résolution d'une équation différentielle :

Soit ***y*** une fonction causale. Résoudre l'équation différentielle linéaire : $y'(t)-y(t)=\left(e^t-t+1\right)U(t)$ *équation* **(E)**

en appliquant « *la transformations de Laplace ,* la solution recherchée doit vérifier la condition initiale : $y(0^+)=0$

En appliquant la linéarité de la transformée de Laplace aux 2 membres de l'équation **(E)** on obtient :

$$\mathscr{L}\{y'(t)-y(t)\}=\mathscr{L}\left\{\left(e^t-t+1\right)U(t)\right\}\Leftrightarrow$$

$$\mathscr{L}\{y'(t)\}-\mathscr{L}\{y(t)\}=\mathscr{L}\left\{e^tU(t)\right\}-\mathscr{L}\{tU(t)\}+\mathscr{L}\{U(t)\}$$

Posons $\mathscr{L}\{y(t)\}=Y(p)$, d'après une formule du cours on sait que : $\mathscr{L}\{y'(t)\}=pY(p)-y\left(0^+\right)$

Comme on a également : $\mathscr{L}\left\{e^tU(t)\right\}=\dfrac{1}{p-1}$

$$\mathscr{L}\{tU(t)\}=\frac{1}{p^2}$$

$$\mathscr{L}\{U(t)\}=\frac{1}{p}$$

L''équation **(E)** s'écrit : $pY(p)-y\left(0^+\right)-Y(p)=\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{p}$

Comme $y(0^+)=0$ on obtient $Y(p)(p-1)=\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{p}$ donc $Y(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2}-\dfrac{1}{p^2(p-1)}+\dfrac{1}{p(p-1)}$

Décomposition en éléments simples des fractions : $\dfrac{1}{p^2(p-1)}=\dfrac{?}{p}+\dfrac{?}{p^2}+\dfrac{?}{p-1}$ et $\dfrac{1}{p(p-1)}=\dfrac{?}{p}+\dfrac{?}{p-1}$

Par identification, on trouve que $\begin{cases}\dfrac{1}{p^2(p-1)}=\dfrac{-1}{p}+\dfrac{-1}{p^2}+\dfrac{1}{p-1}\\[2mm] \dfrac{1}{p(p-1)}=\dfrac{-1}{p}+\dfrac{1}{p-1}\end{cases}$

Donc $Y(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2}-\left(\dfrac{-1}{p}+\dfrac{-1}{p^2}+\dfrac{1}{p-1}\right)+\left(\dfrac{-1}{p}+\dfrac{1}{p-1}\right)$

Donc $Y(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2}+\dfrac{1}{p^2}$

Comme $y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y(p)\}$ et que $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(p-1)^2}\right\}=te^tU(t)$ et que $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p^2}\right\}=tU(t)$

On obtient

$$y(t)=te^tU(t)+tU(t)\Leftrightarrow y(t)=t\left(1+e^t\right)U(t)$$

Conclusion : la fonction causale $\boxed{y(t)=t\left(1+e^t\right)U(t)}$ est la solution de l'équation différentielle **(E)** telle que

$y(0^+)=0$

F) ***Remarque*** **:**

Exemple d'une décomposition en éléments simples d'une fraction de $\mathbb{R}[X]$ qui a des «*racines simples*» dans $\mathbb{C}$

Soit la fraction $\dfrac{1}{x^3+1}$

Le polynôme $P(x)=x^3+1$ a 1 *racine réelle* et 2 *racines complexes conjuguées*

On peut décomposer cette fraction (en la considérant comme étant une fraction sur $\mathbb{C}[X]$) en éléments simples du 1ier ordre :

1) Factorisons le polynôme x^3+1 sur $\mathbb{C}[X]$

   On obtient : $x^3+1=(x+1)\left(x-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(x-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$

2) Décomposons la fraction $\dfrac{1}{x^3+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}[X]$

   On obtient : $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{\frac{1}{3}}{x+1}+\dfrac{\frac{1}{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{x-e^{i\frac{\pi}{3}}}+\dfrac{\frac{1}{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}}{x-e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

Comme $\dfrac{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{x-e^{i\frac{\pi}{3}}}+\dfrac{e^{i\frac{2\pi}{3}}}{x-e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\dfrac{-x+2}{x^2-x+1}$

On obtient : $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{\frac{1}{3}}{x+1}+\dfrac{\frac{1}{3}(-x+2)}{x^2-x+1}$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{1}{3(x+1)}+\dfrac{2-x}{3\left(x^2-x+1\right)}$

Cette expression est la décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{1}{x^3+1}$ sur $\mathbb{R}[X]$

- avec un élément simple *de première espèce* (« *du premier ordre* »)
- et un élément simple *de seconde espèce* (« *du second ordre* »)