Séries de Fourier

Les séries de Fourier, objet de se chapitre. Il s'agit de décomposer un signal périodique φ de période 2π en la somme d'harmoniques de la forme $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$. Sous certaines hypothèses, on a :

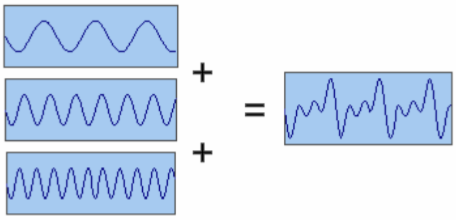
Procédé de décomposition :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\cos nx\,dx,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\sin nx\,dx$$

Procédé de reconstitution :

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

➢ ***superposition de signaux sinusoïdaux*** **:** onde principale avec ses *«harmoniques»*



➢ ***Généralisation*** :

1. $f(x) = A_n \sin(nx + \phi_n)$ est une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{n}$ d'amplitude A_n et de phase ϕ_n .

En développant l'expression, on obtient : $A_n \sin(nx+\phi_n) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$

avec $a_n = A_n \sin\phi_n$ et $b_n = A_n \cos\phi_n$ $\left(A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ et } \tan\phi_n = \frac{b_n}{a_n} \right)$

2. La fonction $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} A_n \sin(nx + \phi_n)$ est une fonction périodique de période $T = 2\pi$

En développant on a une somme partielle d'une série de Fourier $S_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos(nx) + b_n \sin(nx)$

3. La fonction $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} A_n \sin(n\omega x + \phi_n)$ est une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$

En développant on a $S_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$ (somme partielle série de Fourrier)

➢ ***Quelques calculs à connaître*** *(et à savoir redémontrer)*

1. Soit ***f*** une fonction réelle continue par morceau (*cpm*) et périodique de période **T**

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx = \cdots$$

2. Si ***f*** est une fonction *cpm et* impaire de période $T = 2\pi$ alors $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$

Si ***f*** est une fonction *cpm et paire* de période $T = 2\pi$ alors $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\int_0^{\pi} f(x)\,dx$

3. Quelques calculs d'intégrales à connaître….. :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ \pi & \text{si } n = k \end{cases} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(kx)\,dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ \pi & \text{si } n = k \end{cases}$$

1. *Formules* : Calcul des coefficients de la série de Fourrier « *associée à une fonction* »

Soit f une fonction réelle continue par morceau (*cpm*) et périodique de période $T = 2\pi$, «*la série de Fourrier associée à cette fonction*» est la série $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ telle que :

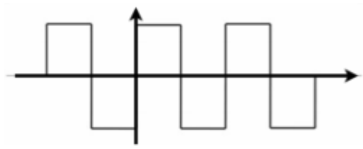
$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \end{cases}$$

Soit f une fonction réelle continue par morceau (*cpm*) et périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, «*la série de Fourrier associée à cette fonction*» est la série $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ telle que :

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(n\omega x)\,dx \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(n\omega x)\,dx \end{cases}$$

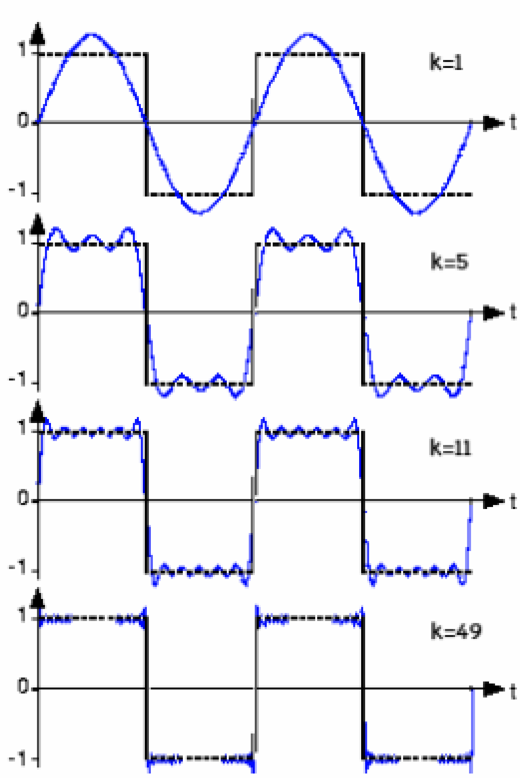
Exemple : Soit f la fonction réelle «*créneau*», **impaire** de période $\mathbf{T = 2\pi}$ et d'amplitude **1**

Cette fonction est définie par $\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } 0 \le x < \pi \\ f(x) = -1 & \text{si } \pi \le x < 2\pi \end{cases}$



Et on obtient par les calculs : $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0 \\ b_n = \dfrac{2}{n\pi}\left(1 - \cos(n\pi)\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = a_n = 0 \\ b_{2k} = 0 \\ b_{2k+1} = \dfrac{4}{(2k+1)\pi} \end{cases}$

« TRACONS CE CALCUL » : Traçons la représentation graphique de la fonction f et celle de la fonction définie par la somme partielle de la série de Fourier: $S_K(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{K} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ quand $K = 1$, $K = 5$, $K = 11$ et $K = 49$



« Une analyse » de ces 4 représentations graphiques permet de poser plusieurs questions :

Question n°1

Quelles sont les conditions pour qu'une série de Fourrier converge ??

Question n°2

Pour quelles valeurs de x *, a-t-on*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)x) \ ??$$

Question n°3 :

Que se passe-t-il aux points où la fonction est discontinue ??

La fonction f est discontinue en $x = \pi$

Et on a : $f(\pi^-) = 1$ et $f(\pi^+) = -1$

Ainsi que : $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)\pi) = 0$

(convergence «*simple*» et phénomène de **Gibbs**)

Théorème de DIRICHLET

Soit f une fonction réelle cpm (abréviation : lire le commentaire (*) en page 4) et périodique de période $T = 2\pi$

Si la courbe ***y=f(x)*** admet en tout point une ½ tangente à gauche et une ½ tangente à droite (½ tangentes non verticales) alors la série de Fourier relative à cette fonction converge simplement en tout point et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}\quad a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \frac{1}{2}\left(f(x^-) + f(x^+)\right)$ (notion de convergence «*simple*» d'une série)

Remarques :

- Si, en x, f est continue et est dérivable à gauche et à droite alors comme $f(x^-) = f(x^+)$ on a :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = f(x)$$

- Dans le théorème de Dirichlet, la fonction dérivée ***f '*** doit être également « *au moins* » une fonction cpm
  On dit également que la fonction f doit être « *au moins* » de classe C^1 **par morceaux**

Exemple : Reprenons la fonction réelle «*créneau*», **impaire** de période $\mathbf{T = 2\pi}$ et d'amplitude **1**

« *DIRICHLET* » permet d'écrire que :
$$\begin{cases} \text{si } x = 0 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin\left((2k+1)0\right) = \frac{1}{2}\left(f(0^-) + f(0^+)\right) = 0 \\ \forall x \in \left]0, \pi\right[\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin\left((2k+1)x\right) = f(x) = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{si } x = \pi \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin\left((2k+1)\pi\right) = \frac{1}{2}\left(f(\pi^-) + f(\pi^+)\right) = 0 \\ \forall x \in \left]\pi, 2\pi\right[\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin\left((2k+1)x\right) = f(x) = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

2. *Formule de PARSEVAL*

Soit f une fonction réelle cpm et périodique de période $T = 2\pi$ alors on a :

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ (ou $\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)dt$ pour une fonction de période T)

Remarque :

En utilisant la formule $e^{inx} = cos(nx) + i\,sin(nx)$

on a : $\begin{cases} cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \\ sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \end{cases}$ (formules d'Euler) et en posant $\begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \overline{c_n} \end{cases}$

on a :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = c_0 + c_{-1}e^{-ix} + c_1 e^{ix} + c_{-2}e^{-i2x} + c_2 e^{i2x} + \ldots\ldots$$

Et $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-inx}dx$

et la formule de PARSEVAL s'écrit : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)dt$

Exemple :

Soit f la fonction 2π-périodique définie par : $\forall x \in [0\,;2\pi[\quad f(x)=x$

La fonction f est une fonction réelle continue par morceau (cpm), on peut donc appliquer la formule de Parseval :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)dt \quad \textbf{(1)}$$

Calculons $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$

1. Calcul de c_0 : $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$

2. Calcul de c_n pour $n \neq 0$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\left[x\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}dx = \frac{i}{n} - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-inx}}{-n^2}\right]_0^{2\pi} = \frac{i}{n}$$

On a donc : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}|c_{-n}|^2 + |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}|c_n|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{i}{-n}\right|^2 + |\pi|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{i}{n}\right|^2 = \pi^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

Calculons $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)dt$:

3. Calcul de : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t^2 dt = \left[\frac{1}{2\pi}\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{3}$

L'égalité de Parseval **(1)** appliquée à cette fonction donne donc le résultat suivant : $\pi^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4\pi^2}{3}$

Ce qui permet de retrouver le résultat « très connu » : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Exercice similaire à faire …. :

Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

en appliquant l'égalité de Parseval à la fonction g 2π-périodique définie par : $\forall x \in [0\,;2\pi[\quad g(x)=x^2$

(*) Commentaire

Une fonction f est continue par morceau (abréviation cpm) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si elle admet un nombre fini (ou dénombrable) de discontinuité de 1ière espèce (avec une limite à gauche et une limite à droite)

Propriété de l'intégrale d'une fonction cpm :

2 fonctions f et g cpm sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sont « *presque toujours égales* » si elle sont égales « *presque partout* »,

c'est-à-dire si elle sont égales sauf en un nombre fini de points sur $[a,b]$ ….Et on a : $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$

Remarque :

« *presque toujours égales* » est un « opérateur mathématique » qui permet de définir un produit scalaire malgré qu'un axiome du produit scalaire ne soit pas vérifié….d'où le concept mathématique : « *presque toujours égale à 0* »