Quelques résultats sur les séries numériques à connaître.....

1. **La série** $1-1+1-1+\dots$ diverge « grossièrement »

2. **La série harmonique** $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$

Cette série est une série de Riemann qui diverge

$$\text{et on a : } 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \gamma + \ln(n) + \varepsilon(n) \text{ avec } \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(n) = 0$$

Le nombre γ est appelé la constante d'Euler et on a $\gamma \approx 0,58$

3. **La série harmonique alternée** $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+(-1)^n \frac{1}{n}+\dots$

Cette série est une série alternée qui converge

$$\text{et on a : } 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+(-1)^{n-1} \frac{1}{n}+\dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(k-1)} \frac{1}{k} = \ln(2)$$

4. **Les séries de Riemann** $1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\dots+\frac{1}{n^k}+\dots$

Ces séries sont des séries de Riemann et convergent si et seulement si $k > 1$

$$\text{Cas particulier : si } k = 2, \text{ on a } 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{avec } \pi \approx 3,14 \text{ et } \frac{\pi^2}{6} \approx 1,6$$

5. **La série géométrique** $1+x+x^2+\dots+x^n+\dots$

Cette série est une « série géométrique » de raison x et converge si et seulement $|x| < 1$

$$\text{Si } x \neq 1 \text{ on a : } 1+x+x^2+x^3+\dots+x^N = \sum_{k=0}^N x^k = \frac{1-x^{(N+1)}}{1-x} \text{ et on obtient : si } |x| < 1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x^k} = \frac{1}{1-x}$$

$$\text{Cas particulier : si } x = \frac{1}{2}, \text{ on a } 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

6. **La série entière** $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$ avec $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Cette série converge } \forall x \in \mathbb{R} \text{ et on a : } 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$$\text{Cas particulier : si } x=1, \text{ on a } 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}+\dots = e^1 = e$$

avec $e \approx 2,7$