EXERCICE : Différentes méthodes pour résoudre une équation du 2ième degré dans $\mathbb{C}$

Enoncé de l'exercice **Résoudre l'équation $z^2 = 1+i$ avec $z \in \mathbb{C}$**

Question n°1 : Résoudre cette équation avec le nombre complexe z sous sa forme algébrique ***(1ière méthode)***

Question n°2 : Résoudre cette équation avec le nombre complexe z sous sa forme trigonométrique puis via sa forme avec « *l'exponentielle complexe* » ***(2ème méthode)***

Question n°3 : En déduire une valeur décimale approchée à 10^{-3} du nombre $cos(\pi/8)$

CORRECTION **Question n°1** ***(1ière méthode)***

On pose $z = a+ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

Cette équation s'écrit : $(a+ib)^2 = 1+i$ et en développant on obtient : $a^2 - b^2 + i2ab = 1+i$

Par « *identification* » on obtient le système de 2 équations à 2 inconnues $\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 1 \end{cases}$ qu'il faut résoudre

Par « *la méthode de substitution* » en posant $b = \dfrac{1}{2a}$ car $a \neq 0$ on obtient en remplaçant b par sa valeur

un système équivalent qui est : $\begin{cases} a^2 - \dfrac{1}{4a^2} = 1 \\ b = \dfrac{1}{2a} \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} 4a^4 - 4a^2 - 1 = 0 \\ b = \dfrac{1}{2a} \end{cases}$

Pour calculer *les différentes valeurs possibles de la variable* a, on doit faire un changement de variable : $X = a^2$

ET on obtient une équation du second degré : $4X^2 - 4X - 1 = 0$ *à résoudre*

Cette méthode, pour calculer a et b est longue et difficile et peut être simplifiée par une ***astuce*** .

Astuce : *Si on ajoute à ce système une autre équation :* $\left|z^2\right| = |1+i|$ donc $\left|z^2\right| = |z \times z| = |z| \times |z| = |z|^2 = |1+i|$

on obtient une **3ième** équation $a^2 + b^2 = \sqrt{2}$ (car $|z|^2 = a^2 + b^2$ et $|1+i| = \sqrt{2}$) qui va simplifier la résolution du système

ET on obtient le système équivalent : $\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{2} \\ 2ab = 1 \end{cases}$ qui est beaucoup plus facile à résoudre ..

Résolution : $\begin{cases} 2a^2 = \sqrt{2}+1 \\ 2b^2 = \sqrt{2}-1 \\ 2ab = 1 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} a = +\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} \\ ou \\ a = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} \end{cases}$ **et** $\begin{cases} b = +\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ ou \\ b = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} \end{cases}$ **avec** $2ab = 1$

Comme $2ab = 1 \Rightarrow ab > 0$, on ne va retenir que **les 2 solutions suivantes** : $\begin{cases} z_1 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ z_2 = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} = -z_1 \end{cases}$

Conseil :

Il est très facile de vérifier que ce calcul est correct avec une calculatrice

en vérifiant que $z_1^2 = 1+i$, c'est-à-dire $\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)^2 = 1+i$

Cela prend quelques secondes et cela permet souvent de corriger des erreurs d'inattention dans les calculs…
Dès que possible, il faut vérifier ses calculs, car c'est souvent très utile…..
Cela permet de gagner quelques points très facilement lors d'un DS ou d'un examen en corrigeant les fautes de calcul…

Question n°2 ***(2ième méthode)*** Posons $z = \|z\| e^{i\theta}$ et $Z = 1+i$ L'équation (E) s'écrit donc : $\left(\|z\| e^{i\theta}\right)^2 = Z$

ET comme $|Z| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ on a $Z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(e^{i(\frac{\pi}{4})}\right)$

Donc l'équation $z^2 = 1+i$ (E) s'écrit : $z^2 = 1+i \Leftrightarrow \left(\|z\| e^{i\theta}\right)^2 = \sqrt{2}\left(e^{i(\frac{\pi}{4})}\right) \Leftrightarrow \|z\|^2 e^{i2\theta} = \sqrt{2}\left(e^{i(\frac{\pi}{4})}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \|z\|^2 = \sqrt{2} \\ \text{et} \\ 2\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|z\| = \sqrt{\sqrt{2}} \\ \text{et} \\ \theta = \frac{\pi}{8} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ \text{et} \\ z_2 = \sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)\right) = -\sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \end{cases}$$

<u>CONCLUSION</u> $z^2 = 1+i \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \sqrt{\sqrt{2}}\left(e^{i(\frac{\pi}{8})}\right) \\ z_2 = -\sqrt{\sqrt{2}}\left(e^{i(\frac{\pi}{8}+\pi)}\right) = -z_1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ z_1 et z_2 sont les **2 solutions** de l'équation (E)

Question n°3

Par identification on a $\sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ *DONC* $\sqrt{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$

DONC $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \approx 0.923$

CONCLUSION : une valeur décimale approchée à 10^{-3} près du nombre réel $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est 0.923

Remarque : *3ième méthode* pour résoudre l'équation (E)

Pour résoudre l'équation (E) $z^2 = 1+i$ avec $z \in \mathbb{C}$,
on peut appliquer la méthode générale : les formules avec le calcul du **discriminant** Δ
Cette méthode permet de résoudre TOUTES les équations du 2ième degré dans $\mathbb{C}$ (même avec des coefficients dans $\mathbb{C}$)
c'est-à-dire des équations de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec $z \in \mathbb{C}$ et avec a, b et $c \in \mathbb{C}$

Pour appliquer les formules, il suffit de trouver un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$
(*c'est-à-dire dire* ***<u>une</u>*** *racine carrée du nombre* Δ)

Dans cet exercice, on peut écrire l'équation (E) sous la forme $z^2 - 1 - i = 0$ AVEC $a = 1$ et $b = 0$ et $c = -(1+i)$

<u>Calcul de</u> Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 + 4(1+i) = 4(1+i) = 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\sqrt{2}\left(e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}\right)$

ET donc $\delta = 2\sqrt{\sqrt{2}}\left(e^{i(\frac{\pi}{8}+k\pi)}\right)$ Et donc nous pouvons poser $\delta = 2\sqrt{\sqrt{2}}\, e^{i(\frac{\pi}{8})}$

ET les 2 formules « à appliquer » donnent le résultat : $\begin{cases} z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} = \sqrt{\sqrt{2}}\, e^{i(\frac{\pi}{8})} \\ z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} = -\sqrt{\sqrt{2}}\, e^{i(\frac{\pi}{8})} \end{cases}$

<u>Commentaires</u> :

- Le nombre complexe δ existe car un nombre complexe Δ quelconque a TOUJOURS au moins une racine carrée
- Quand $\Delta \in \mathbb{R}$ et que $\Delta < 0$, ne JAMAIS écrire $\sqrt{\Delta}$. Il faut utiliser le nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta < 0$ c'est-à-dire $\delta = i\sqrt{|\Delta|}$