Exercices / Explications sur la notion et l'utilisation de la « Transformée de Laplace »

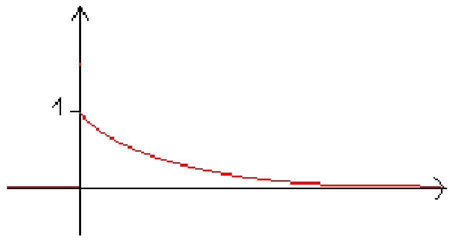
Exercice n°1 (le 7/12/2011) :

Calculer **la transformée de Laplace** de la fonction trigonométrique «***cosinus*** »,
c'est-à-dire : calculer l'image **F(p)** (avec $p \in \mathbb{C}$) associée à la fonction réelle définie par : $t \to \cos(\omega t)$ avec $\omega > 0$

Indication : Pour calculer la transformée de Laplace de la fonction trigonométrique «*cosinus* », commencer par calculer la transformée de Laplace de la fonction $t \to e^{i\omega t}$ $\left(\omega \in \mathbb{R}^*\right)$ puis utiliser la formule $\cos(\omega t) = \dfrac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$

I-1 Calcul de l'image F(p) associée à la fonction «*causale*» *exponentielle complexe* **:** $x \to e^{-ax}$ $\left(a \in \mathbb{C}^*\right)$

Représentation graphique de cette fonction quand $a \in \mathbb{R}$ *et* $a > 0$



$$F(p) = e^{-a.t}.U(t) = \begin{cases} e^{-a.t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.e^{-a.t}.dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a).t}.dt = \left[\frac{e^{-(p+a).t}}{-(p+a)}\right]_0^{\infty}$$

Si *Partie Réelle* $(p+a) > 0$, c'est-à-dire si *Partie Réelle* $(p) > -a$ comme $\lim\limits_{t \to \infty} e^{-(p+a).t} = 0$

on obtient : $F(p) = L(e^{-a.t}.U(t)) = \dfrac{1}{p+a}$

I-2 Calcul de l'image F(p) associée à la fonction «*causale*» *cosinus* **:** $x \to \cos(\omega x)$ **avec** $\omega > 0$

$$L(\cos\omega t) = L\left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[L(e^{j\omega t}) + L(e^{-j\omega t})\right] = \frac{1}{2}.\left[\frac{1}{p - j\omega} + \frac{1}{p + j\omega}\right]$$

Conclusion : si *Partie Réelle* $(p) > 0$ alors : $L(\cos\omega t) = \dfrac{p}{p^2 + \omega^2}$

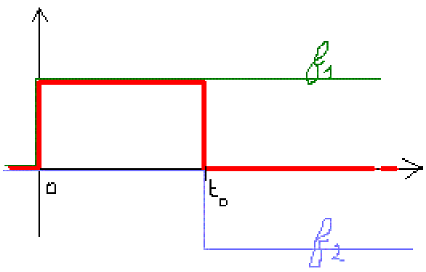
I-3 Calcul de l'image F(p) associée à la fonction «*causale*» *sinus* **:** $x \to \sin(\omega x)$ **avec** $\omega > 0$

On peut également démontrer par les calculs que : si *Partie Réelle* $(p) > 0$ alors : $L(\sin\omega t) = \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

Exercice n°2 (le 7/12/2011) :

Calculer la transformée de Laplace « *d'un créneau* » entre $t = 0$ et $t = t_0 > 0$:

$f(t) = A$ *quand* $t \in [\,0\,;t_0\,[$ sin*on* $f(t) = 0$



f(t) = f₁(t) + f₂(t) = U(t) – U(t – t₀)

$$F(p) = \frac{A}{p} - \frac{A}{p}.e^{-p.t_0}$$

Conclusion : $F(p) = \dfrac{A}{p}(1 - e^{-p.t_0})$

Exercice n°3 (le 7/12/2011) **:**

Résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre : $y''(t)+4y(t)=\sin(2t)$ *équation* **(E)**

avec les conditions initiales $y(0)=y'(0)=0$

- En utilisant la transformée de Laplace dans le membre de gauche de l'équation **(E)** on obtient par linéarité :

  $\mathscr{L}\{y''+4y\}(p)=\mathscr{L}\{y''\}(p)+4\mathscr{L}\{y\}(p)$

  Comme $\mathscr{L}\{y''\}(p)=p^2\mathscr{L}\{y\}(p)-py\left(0^+\right)-y'\left(0^+\right)$

  Et en appliquant les « *conditions initiales* »: $y(0)=y'(0)=0$ on obtient : $\mathscr{L}\{y''\}(p)=p^2\mathscr{L}\{y\}(p)$

- En utilisant la transformée de Laplace dans le membre de droite de l'équation **(E)** on a :

  Si on pose $g(t)=\sin(2t)$, *le résultat exercice n°1* permet d'écrire que $\mathscr{L}\{g\}(p)=\dfrac{2}{p^2+4}$

  quand $\textit{Partie Réelle}(p)>0$

Conclusion : En utilisant la transformée de Laplace, l'équation **(E)** s'écrit : si $p\in\mathbb{C}$ avec $\textit{Partie Réelle}(p)>0$:

$$p^2\mathscr{L}\{y\}(p)+4\mathscr{L}\{y\}(p)=\frac{2}{p^2+4}\Leftrightarrow\left(p^2+4\right)\mathscr{L}\{y\}(p)=\frac{2}{p^2+4}\Leftrightarrow\mathscr{L}\{y\}(p)=\frac{2}{\left(p^2+4\right)^2}$$

Si on pose $Y(p)=\dfrac{2}{\left(p^2+4\right)^2}$, il faut donc rechercher la fonction «*originale*» de cette transformée de Laplace

c'est-à-dire $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y\}(p)=\dfrac{2}{\left(p^2+4\right)^2}$

Décomposition en éléments simples

On a : $Y(p)=\dfrac{2}{\left(p^2+4\right)^2}=\dfrac{2}{\left((p+2i)(p-2i)\right)^2}=\dfrac{2}{(p+2i)^2(p-2i)^2}$

On recherche avec ***a***,***b***,***c*** et ***d*** $\in\mathbb{C}$ tels que $\dfrac{2}{(p+2i)^2(p-2i)^2}=\dfrac{a}{(p+2i)}+\dfrac{b}{(p+2i)^2}+\dfrac{c}{(p-2i)}+\dfrac{d}{(p-2i)^2}$

Et on obtient : $Y(p)\dfrac{\frac{i}{16}}{(p+2i)}-\dfrac{\frac{i}{16}}{(p-2i)}-\dfrac{\frac{1}{8}}{(p+2i)^2}-\dfrac{\frac{1}{8}}{(p-2i)^2}$ (*voir annexe en page **3***)

C'est-à-dire : $Y(p)=\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{p^2+4}-\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{(p+2i)^2}+\dfrac{1}{(p-2i)^2}\right)$

A partir de cette expression, on va pouvoir trouver **la fonction originale de cette «*transformée de Laplace*»**

c'est-à-dire la fonction réelle *causale* qui vérifie : $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y\}(p)$

D'après les formules du cours on sait que si $\textit{Partie Réelle}(p)>0$:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4}\frac{1}{p^2+4}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{8}\frac{2}{p^2+2^2}\right\}=\frac{1}{8}\sin(2t)\times U(t)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{8}\frac{1}{(p+2i)^2}\right\}=\frac{1}{8}te^{-2it}\times U(t)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{8}\frac{1}{(p-2i)^2}\right\}=\frac{1}{8}te^{2it}\times U(t)$$

Comme $\frac{1}{8}te^{-2it}+\frac{1}{8}te^{2it}=\frac{t}{8}\left(e^{-2it}+e^{2it}\right)=\frac{t}{4}\cos(2t)$

Conclusion : la solution de l'équation différentielle **(E)** est la fonction «*causale*» :

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y\}(p)=\left[\frac{1}{8}\sin(2t)-\frac{t}{4}\cos(2t)\right]\times U(t)$$

Annexe de l'exercice n°3

Décomposition en éléments simples (éléments simples d'ordre 1 car on travaille dans $\mathbb{C}$)

On recherche ***a***,***b***,***c*** et ***d***$\in\mathbb{C}$ tels que $Y(p)=\frac{2}{(p+2i)^2(p-2i)^2}=\frac{a}{(p+2i)}+\frac{b}{(p+2i)^2}+\frac{c}{(p-2i)}+\frac{d}{(p-2i)^2}$

1) Etude de la parité

Comme la fonction ***Y*** est une fonction paire en ***p*** , on a la relation :

$$Y(p)=Y(-p)\Leftrightarrow\frac{a}{(p+2i)}+\frac{b}{(p+2i)^2}+\frac{c}{(p-2i)}+\frac{d}{(p-2i)^2}=\frac{a}{(-p+2i)}+\frac{b}{(-p+2i)^2}+\frac{c}{(-p-2i)}+\frac{d}{(-p-2i)^2}$$

Par identification on obtient : $\begin{cases}c=-a\\ d=b\end{cases}$

On recherche donc ***a*** et ***b***$\in\mathbb{C}$ tels que $Y(p)=\frac{2}{(p+2i)^2(p-2i)^2}=\frac{a}{(p+2i)}-\frac{a}{(p-2i)}+\frac{b}{(p+2i)^2}+\frac{b}{(p-2i)^2}$

2) Technique pour trouver les valeurs de ***a*** et de ***b***

2.1) Via un calcul de limite : Pour calculer la valeur de ***b***, on peut calculer : $\lim\limits_{(p-2i)^2\to 0} Y(p)\times(p-2i)^2$

$Y(p)\times(p-2i)^2=\frac{2}{(p+2i)^2}$ donc $\lim\limits_{p\to 2i} Y(p)\times(p-2i)^2=-\frac{1}{8}$

$Y(p)\times(p-2i)^2=\left[\frac{a}{(p+2i)}-\frac{a}{(p-2i)}+\frac{b}{(p+2i)^2}\right]\times(p-2i)^2+b$ donc $\lim\limits_{p\to 2i} Y(p)\times(p-2i)^2=b$

On en déduit que $b=-\frac{1}{8}$, puis pour calculer la valeur de ***a*** on calcule par exemple $Y(0)$ et on trouve : $a=\frac{i}{16}$

Conclusion : $Y(p)\frac{\frac{i}{16}}{(p+2i)}-\frac{\frac{i}{16}}{(p-2i)}-\frac{\frac{1}{8}}{(p+2i)^2}-\frac{\frac{1}{8}}{(p-2i)^2}$

c'est-à-dire : $Y(p)=\frac{1}{4}\frac{1}{p^2+4}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{(p+2i)^2}+\frac{1}{(p-2i)^2}\right)$

2.2) Via un calcul de ***Y(p)*** pour certaines valeurs de la variable ***p*** :

Pour calculer les valeurs de ***a*** et de ***b***, on peut calculer par exemple $Y(0)=\frac{2}{\left(0^2+4\right)^2}=\frac{1}{8}$ et $Y(i)=\frac{2}{\left(i^2+4\right)^2}=\frac{2}{9}$

On obtient un système de 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases}\frac{1}{8}=\frac{a}{(0+2i)}-\frac{a}{(0-2i)}+\frac{b}{(0+2i)^2}+\frac{b}{(0-2i)^2}\\ \frac{2}{9}=\frac{a}{(i+2i)}-\frac{a}{(i-2i)}+\frac{b}{(i+2i)^2}+\frac{b}{(i-2i)^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{8}=\frac{2a}{2i}-\frac{2b}{4}\\ \frac{2}{9}=\frac{a}{3i}-\frac{b}{9}+\frac{a}{i}-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8ai+4b=-1\\ \frac{-4ai}{3}+\frac{-10b}{9}=\frac{2}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8ai+4b=-1\\ 6ai+5b=-1\end{cases}$$

ET on obtient : $\begin{cases}8ai+4b=-1 & (\text{equation A})\\ 6ai+5b=-1 & (\text{equation B})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}40ai-24ai=-5+4 & (5A-4B)\\ 12b-20b=-3+4 & (3A-4B)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{-1}{16i}\\ b=-\frac{1}{8}\end{cases}$

Conclusion : $Y(p)\frac{\frac{-1}{16i}}{(p+2i)}-\frac{\frac{-1}{16i}}{(p-2i)}-\frac{\frac{1}{8}}{(p+2i)^2}-\frac{\frac{1}{8}}{(p-2i)^2}$

c'est-à-dire : $Y(p)=\frac{1}{4}\frac{1}{p^2+4}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{(p+2i)^2}+\frac{1}{(p-2i)^2}\right)$

Exercice n°4 (le 10/12/2011) **:**

Résolution d'une équation différentielle linéaire avec la transformée de Laplace
Pour résoudre une équation différentielle linéaire dont l'inconnue est une fonction ***y*** « *causale* », on peut utiliser la transformée de Laplace « *au niveau* » *de l'équation différentielle*. Avec cette méthode : la solution de cette équation différentielle est la fonction ***y*** qui est l'originale de la transformée de Laplace que l'on trouve généralement après une décomposition en éléments simples d'une fraction polynomiale en ***p***.

Exemple : Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y' - y = \left(e^t - t + 1\right)U(t) \\ y(0^+) = 0 \end{cases}$$

$$L(y'(t)) = pY(p) - y(0^+)$$

$$L(y(t)) = Y(p)$$

$$L(e^t U(t)) = \frac{1}{p-1}$$

$$L(tU(t)) = \frac{1}{p^2}$$

$$L(U(t)) = \frac{1}{p}$$

$$pY(p) - y(0^+) - Y(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$(p-1)Y(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p^2(p-1)} + \frac{1}{p(p-1)}$$

$$\frac{1}{p^2(p-1)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \frac{c}{p-1} = \frac{a(p^2-p) + b(p-1) + cp^2}{p^2(p-1)} = \frac{(a+c)p^2 + (b-a)p - b}{p^2(p-1)}$$

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b - a = 0 \\ -b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \quad donc \quad \frac{1}{p^2(p-1)} = -\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-1}$$

$$\frac{1}{p(p-1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p-1)^2} + \cancel{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p^2} - \cancel{\frac{1}{p-1}} - \cancel{\frac{1}{p}} + \cancel{\frac{1}{p-1}}$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p^2}$$

$$L(tU(t)) = \frac{1}{p^2} \Rightarrow L(tU(t)e^t) = \frac{1}{(p-1)^2}$$

$$y(t) = U(t)te^t + tU(t) = U(t)(te^t + t)$$