Explications : la notation d'un nombre complexe à l'aide de «l'exponentielle complexe » *(dernière maj le 22/04/2012)*

- **l'exponentielle réelle** : e^x avec $x \in \mathbb{R}$ est un nombre réel (elle fait l'étude en classe de *Terminale*, d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)
- **l'exponentielle complexe** : e^{ix} avec $x \in \mathbb{R}$ est un nombre complexe ($\in \mathbb{C}$) ET on peut la «*considérer* » comme une *notation*

1. Si $x \in \mathbb{R}$ alors $f(x) = e^x$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est appelée **: la fonction exponentielle** à base $\boldsymbol{e} \approx 2,7$
Cette fonction est étudiée au lycée en classe de *Terminale….*

A retenir : e^x **est un nombre réel** (qui est strictement positif)

La fonction $\boldsymbol{f}$ définie par $f(x) = e^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$

2. Si $x \in \mathbb{R}$ alors $f(x) = e^{ix}$ est une « *fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$ » (fonction non connue au lycée en classe de *Terminale)*

ET on peut considérer que e^{ix} *avec* $x \in \mathbb{R}$ est une *notation qui peut être utilisée pour écrire un nombre complexe de module **1** ….*

Cette notation est un nombre complexe ($e^{ix} \in \mathbb{C}$) de module **1** et d'argument $\mathbf{x}$ et on a : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

2.1) Quand ***x*** varie de $-\infty$ à $+\infty$: Comme on a : $e^{i(x+2\pi)} = e^{ix}$, **cette notation est 2π périodique**

2.2) Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ *un repère orthonormé direct* et soit ***x*** un nombre réel tel que $x \in [0; 2\pi[$: on peut « *géométriquement* »

définir le nombre ***x*** comme étant « la mesure principale » en radian de l'angle $\left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}\right)$ avec un point M quelconque qui se

trouve sur le ***cercle trigonométrique*** ET la représentation graphique de cette notation e^{ix} est le cercle de centre O de rayon 1

A retenir : e^{ix} est un nombre complexe de module égal à 1 (*il est « très facile » de vérifier que* $\left|e^{ix}\right| = 1$)

Remarque : Si M est un point du plan de coordonnées $(a;b)$ telles que $a^2 + b^2 = 1$

Soit $z = a + ib$ l'affixe de ce point M , on a $z \neq 0$

Et Il est « *facile* » de vérifier que $a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow \exists\, \theta \in [0; 2\pi[\quad \text{tel que} \quad a = \cos(\theta) \ \text{ et } \ b = \sin(\theta)$

A retenir :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \text{alors} \quad z = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow M \in \text{Cercle}(\text{centre} = O \,,\, \text{rayon} = 1) \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = 1$$

« *L'intérêt* » de la notation $z = e^{i\theta}$ est «*évident* » quand on connaît la propriété fondamentale de la fonction exponentielle réelle (ou la règle sur les puissances entières qui est « *généralisable* » aux puissances réelles ou complexes) , c'est-à-dire :

$\forall \theta_1 \in \mathbb{R} \ \ \forall \theta_2 \in \mathbb{R} \quad e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$ (*transformation d'une somme en un produit*)

CONCLUSION : voir le formulaire à comprendre et à retenir : ***paragraphe* 4 *en page* 2**

3. Si $z \in \mathbb{C}$ alors $f(z) = e^z$ est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ (fonction **non connue** au lycée en classe de *Terminale*)

Si on pose $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, ON A DONC $f(z) = e^{(a+ib)} = e^a e^{ib} = e^a \left(\cos b + i \sin b\right)$

Remarque : Comme $e^a \in \mathbb{R}$ et $(\cos b + i \sin b) \in \mathbb{C}$ donc $f(z) = e^z = e^{(a+ib)} \in \mathbb{C}$

Cette fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ fait l'objet d'une étude après le BAC («*en Master* » de mathématiques)

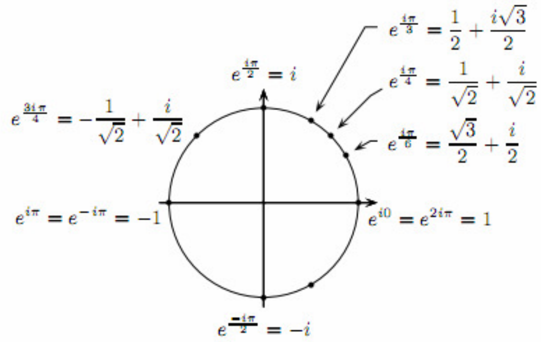
A retenir : Le plan complexe $\mathbb{C}$ « est équivalent à » $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ c'est-à-dire qu'un nombre complexe *z* est équivalent à un couple $(a\,;b)$ de 2 nombres réels. Et si $z \in \mathbb{C}$, on peut écrire que $z = a + i\,b$ avec a et b 2 nombres réels qui représentent la partie réelle et la partie imaginaire du nombre z ......

Et on a également : $e^z = e^{a+i\,b} = e^a \times e^{i\,b} = e^a(\cos b + i \sin b) = \left(e^a \cos b\right) + i\left(e^a \sin b\right)$

4. Conclusion sur la notation d'un nombre complexe « *avec l'exponentielle complexe* » : *(formules importantes à connaître)*

En pratique

Il est indispensable que vous connaissiez sur le bout des doigts certaines valeurs remarquables de l'exponentielle « $i\theta$ », en l'occurrence les valeurs attachées aux mesures d'angle 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, etc.



Théorème (Propriétés algébriques de l'exponentielle « $i\theta$ ») Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

(i) **Conjugaison :** $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.

(ii) **Formules d'Euler :** $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

(iii) **Transformation des sommes en produits :** $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$.

(iv) **Formule de Moivre :** $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

$\forall z \in \mathbb{C}^*$, la notation $z = |z| \times e^{i\theta}$ avec $|z| = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $\theta = \arg(z) = \text{mesure}\left[\left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}\right)\right]$ est la **notation exponentielle** d'un nombre $z \neq 0$, et si on a : $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $(a;b) \neq (0;0)$ on a les relations suivantes :

1) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

2) $\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

3) $\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Cette notation permet d'écrire : (si $z \neq 0$ et si $z' \neq 0$)

$$z \times z' = |z|e^{i\theta} \times |z'|e^{i\theta'} = |z| \times |z'|e^{i(\theta+\theta')} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |z \times z'| = |z| \times |z'| \\ \arg(z \times z') = \theta + \theta' + 2k\pi \end{cases}$$

Autre formule : si $z \neq 0$ et si $z' \neq 0$, on a $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi = \text{une mesure de l'angle } \left(\widehat{\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}}\right)$

Remarque : La notation exponentielle d'un nombre complexe $z \neq 0$ utilise généralement la mesure $\arg(z) = \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

5. Application / exercice : Résoudre l'équation (E) : $z^3 = 1$ dans $\mathbb{C}$

Comme on a $1 = 1 \times e^{i0}$ (le nombre réel 1 est égal au complexe de module 1 et « d'angle nul » dont une mesure est $\theta = 0$ radian)

Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ *revient à chercher des nombres complexes* ***z*** *tels que*

$$\left(\|z\|e^{i\theta}\right)^3 = 1 \times e^{i0} \Leftrightarrow \|z\|^3\left(e^{i\theta}\right)^3 = 1 \times e^{i0} \Leftrightarrow \|z\|^3 \times e^{i3\theta} = 1 \times e^{i0} \Leftrightarrow \begin{cases} \|z\|^3 = 1 \\ e^{i3\theta} = e^{i0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\|z\|^3\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} = (1)^{\left(\frac{1}{3}\right)} \\ 3\theta = 0 + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \|z\| = 1 \\ \theta = \frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

L'équation (E) *a donc* 3 *solutions*

$k \equiv 0(3) \Rightarrow z_1 = e^{i0} \Rightarrow z_1 = 1$

$k \equiv 1(3) \Rightarrow z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$k \equiv 2(3) \Rightarrow z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}} \Longrightarrow z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$