Exercices à faire... : *Les nombres complexes et les* ***transformations d'un point M du plan****.*

Exercice n°1 **:**
Soit **A** le point de coordonnées (4 ; 2)
Soit **M** le point de coordonnées (6 ; 1)

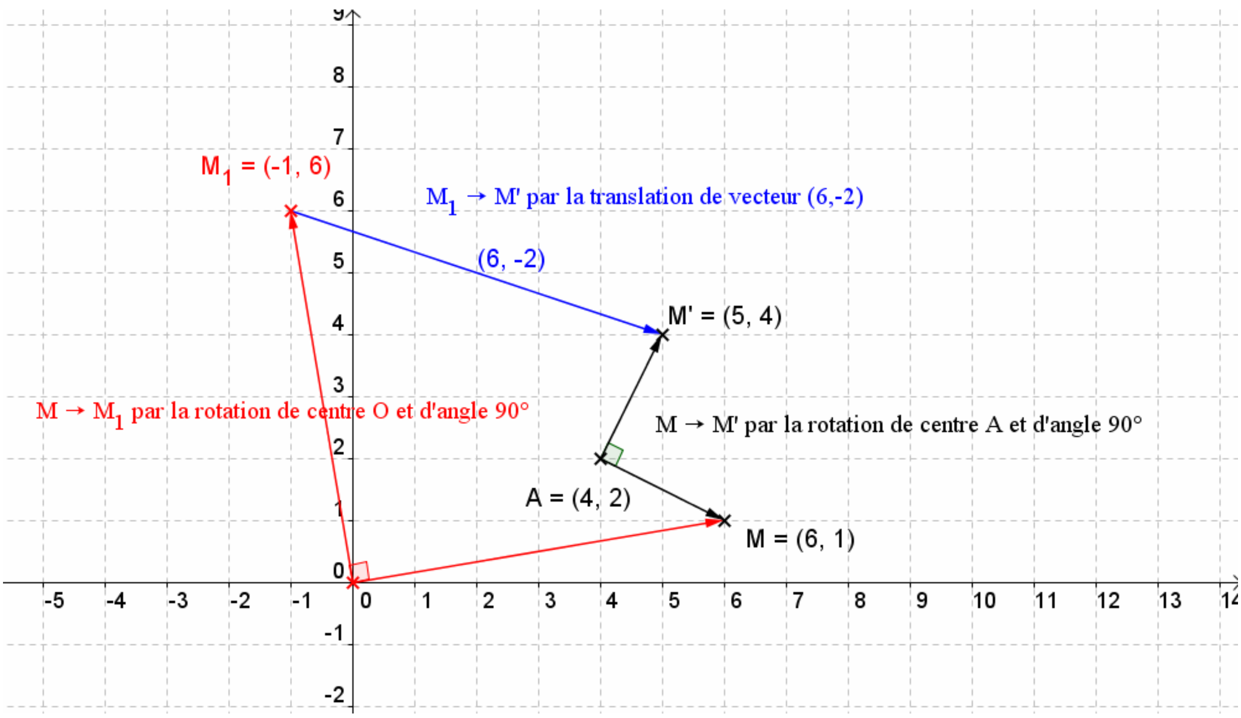
1. Calculer les coordonnées du point **M'** image du point **M** par la rotation de centre **A** est d'angle de mesure **90°**
2. Monter que cette rotation est la composition d'une rotation de centre **O** et d'une translation

Correction :
Question 1

L'affixe du point **A** est : ***a* = 4 + 2i**
L'affixe du point **M** est : ***z* = 6 + i**
Si le point **M'** d'affixe ***z'*** est l'image du point **M** par la rotation de centre **A** et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$
Alors on obtient :

$$z'-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-a) \Leftrightarrow z'-(4+2i)=e^{i\frac{\pi}{2}}\left((6+i)-(4+2i)\right) \Leftrightarrow$$
$$z'-(4+2i)=i\left((6+i)-(4+2i)\right) \Leftrightarrow z'-(4+2i)=i(2-i) \Leftrightarrow z'=5+4i$$

Interprétation graphique :



Question 2

Comme $z'-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-a)$ avec $a=4+2i$ on a donc $z'-(4+2i)=e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z-(4+2i)\right) \Leftrightarrow$
$$z'-(4+2i)=i\left(z-(4+2i)\right) \Leftrightarrow z'=iz+6-2i$$

Soit $T_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ de coordonnés (6 ; -2) et soit $R_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$ la rotation de centre **O** et d'angle dont une mesure fait 90° (ou $\frac{\pi}{2}$ radians) , on obtient : $z'=t_{\vec{u}}\circ R_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}(z)$

En généralisant on obtient : $\forall A \in \wp \quad \forall \theta\,(angle) \quad R_{(A,\theta)}=T_{\vec{u}}\circ R_{(O,\theta)} \; ou \; R_{(A,\theta)}=R_{(O,\theta)}\circ T_{\vec{v}}$

Attention : en général $T_{\vec{u}} \neq T_{\vec{v}}$

Exercice n°2 **:**
Soit **A** le point de coordonnées (4 ; 2)
Soit **M** le point de coordonnées (6 ; 1)

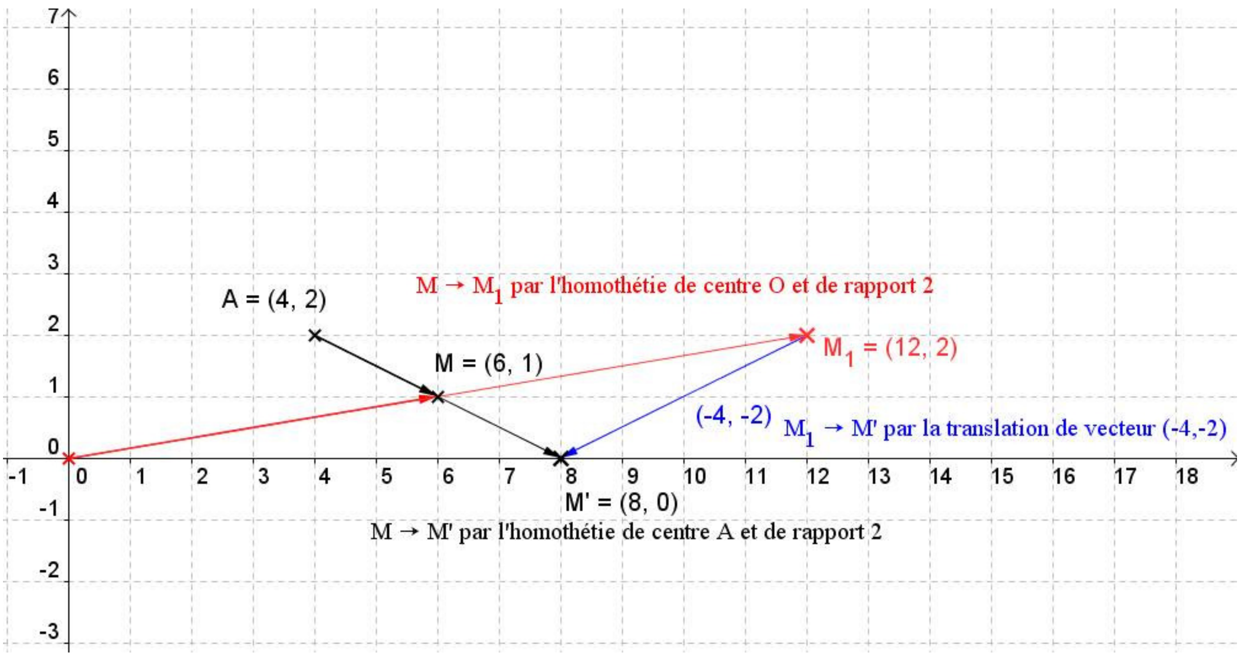
1. Calculer les coordonnées du point **M'** image du point **M** par l'homothétie de centre **A** et de rapport **2**
2. Monter que cette homothétie est la composition d'une homothétie de centre **O** et d'une translation

Correction :

Question 1

L'affixe du point **A** est : ***a* = 4 + 2i**
L'affixe du point **M** est : ***z* = 6 + i**
Si l'image du point **M** par l'homothétie de centre **A** et de rapport **2** est le point **M'** d'affixe *z'*
alors on obtient : $z'-a=2(z-a) \Leftrightarrow z'-(4+2i)=2\big((6+i)-(4+2i)\big) \Leftrightarrow z'-(4+2i)=2(2-i)$
$\Leftrightarrow \quad z'=8$

Interprétation graphique :



Question 2

Comme $z'-a=2(z-a)$ avec $a=4+2i$ on a donc $z'-(4+2i)=2\big(z-(4+2i)\big) \Leftrightarrow z'=2z-4-2i$

Soit $T_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ de coordonnés $(-4\,;-2)$

et soit $H_{(O,2)}$ l'homothétie de centre **O** et de rapport **2**

on a $\forall z \in \mathbb{C} \quad z'=T_{\vec{u}} \circ H_{(O,2)}(z)$

En généralisant on obtient : $\forall A \in \wp \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad H_{(A,k)}=T_{\vec{u}} \circ H_{(O,k)}$ *ou* $H_{(A,k)}=H_{(O,k)} \circ T_{\vec{v}}$

Attention : en général $T_{\vec{u}} \neq T_{\vec{v}}$

Exercice n°3 **:**
Soit **A** le point de coordonnées (4 ; 2)
Soit **M** le point de coordonnées (6 ; 1)

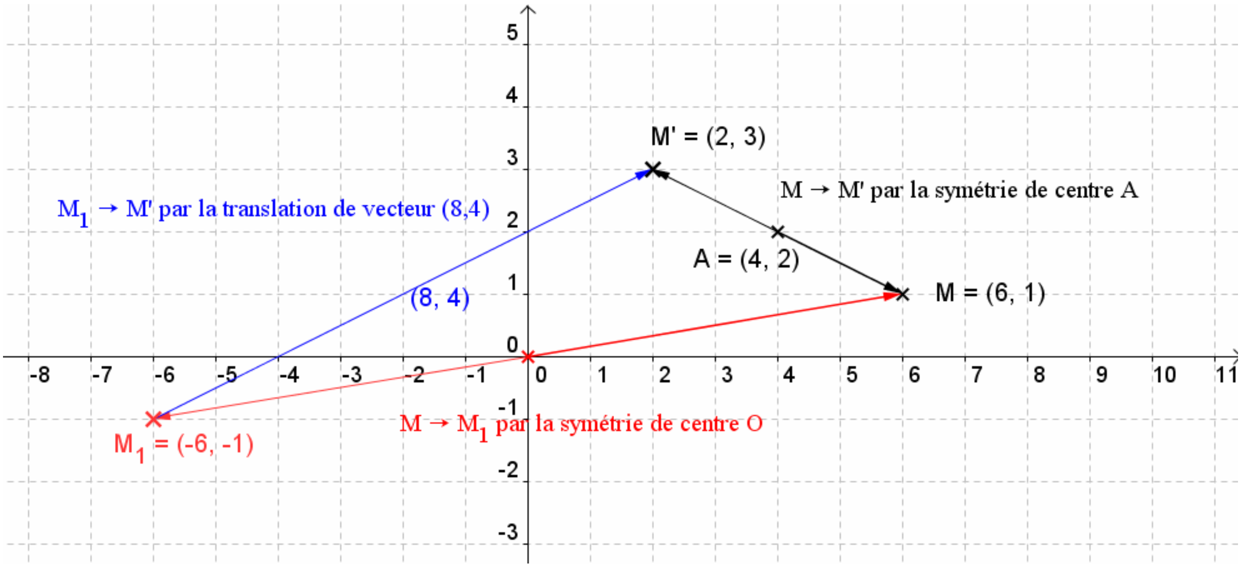
1. Calculer les coordonnées du point **M'** image du point **M** par la symétrie de centre A
2. Monter que cette symétrie est la composition de la symétrie de centre **O** et d'une translation

Correction :

Question 1

L'affixe du point **A** est : $\boldsymbol{a = 4 + 2i}$
L'affixe du point **M** est : $\boldsymbol{z = 6 + i}$
Si l'image du point **M** par la symétrie de centre **A** est le point **M'** d'affixe *z'*
alors on obtient : $z' - a = -(z-a) \Leftrightarrow z' - (4+2i) = -((6+i)-(4+2i)) \Leftrightarrow$
$z' - (4+2i) = -(2-i) \Leftrightarrow z' = 2+3i$

Interprétation graphique :



Question 2

Comme $z' - a = -((z-a)$ avec $a = 4+2i$
on obtient : $z' - (4+2i) = -(z-(4+2i)) \Leftrightarrow z' = -z + 8 + 4i$
Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ de coordonnés **(8 ; 4)**
et soit S_O la symétrie de centre **O**
on a $z' = t_{\vec{u}} \circ S_O(z)$
En généralisant on obtient : $\forall A \in \wp \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad S_A = T_{\vec{u}} \circ S_O \quad ou \quad S_A = S_O \circ T_{\overrightarrow{-u}}$

Remarque 1 : l'affixe du vecteur $\vec{u}$ est égal à $2a$

Remarque 2 : Comme $z' = -z \Leftrightarrow z' = e^{i\pi} \times z$
On peut assimiler la symétrie de centre **O** avec la rotation de centre **O** et d'angle dont une mesure est π
Même remarque pour la symétrie de centre **A** (*avec* **A** *un point quelconque du plan*)
Conclusion : une symétrie centrale de centre **A** est une rotation centre **A** d'angle dont une mesure est π :
$z' - a = -(z-a) \Leftrightarrow z' - a = e^{i\pi}(z-a)$ donc $S_A = R_{(A,\pi)}$

***Exercice n° 4* :**
Soit **M** le point de coordonnées (6 ; 1)

1. Monter que la symétrie axiale d'axe la droite d'équation y=x est la composition de la symétrie axiale d'axe les abscisses et d'une rotation de centre le point **O**
2. Tracer sur un graphique le point **M'** image du point **M** par cette symétrie axiale , puis retrouver par le calcul les coordonnées de ce point **M'**

Correction :

Question 1
Une symétrie axiale est une transformation du plan telle que si le point **M'** d'affixe ***z'*** est l'image du point **M** d'affixe ***z*** on a la relation : $z' = a\overline{z} + b \quad avec\, a \in \mathbb{C} \;\; et \;\; b \in \mathbb{C}$

L'axe de cette symétrie étant la droite (Δ) $d'équation \;\; y = x$, tous les points de cette droite sont «***fixes***»

1. Donc le point **O**(0 ; 0) est un point fixe : c'est-à-dire $z' = z$ donc on a $0 = a \times 0 + b \Leftrightarrow b = 0$
2. Donc le point de coordonnées (1 ; 1) est un point fixe : ce point a pour affixe $z = 1 + i$ donc $\overline{z} = 1 - i$

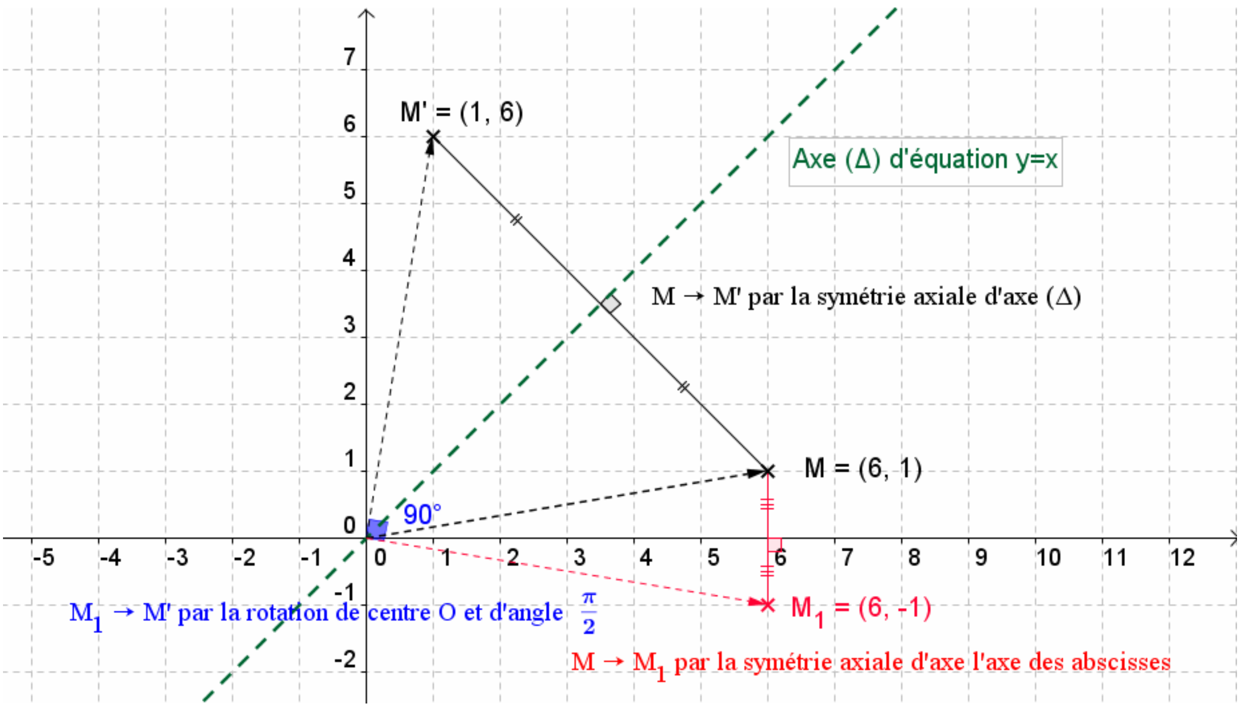
Et on obtient $z' = z \Leftrightarrow 1 + i = a(1 - i) \Leftrightarrow a = i$

Conclusion : la symétrie axiale d'axe la droite (Δ) a pour équation dans $\mathbb{C}$: $z' = i\overline{z}$

Cette symétrie d'axe (Δ) est la composition de la symétrie axiale d'axe les abscisses et de la rotation $R_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$

On a : $S_\Delta = R_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{Ox}$

Interprétation graphique :



Question 2

Comme $z' = i\overline{z}$
Si $z = 6 + i$ on a $z' = i(6 - i)$ donc $z' = 1 - 6i$

Remarque :
On peut généraliser cet exemple à toutes les symétries axiales d'axe une droite passant par le point **O** (0;0)
Ces symétries ont pour équation dans $\mathbb{C}$: $z' = a\overline{z}$ avec $a = e^{i2\theta}$ et $\theta = \arg\left(\widehat{Ox, \Delta}\right)$