DL d'une fonction en 0 : Développement Limité d'une fonction *f* au voisinage de 0

1ière méthode : la formule de Taylor Young :

Soit *f* une fonction réelle $n+1$ fois dérivable (dérivable à l'ordre $n+1$) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$

On appelle **DL** d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la fonction *f* en 0, la formule de Taylor Young *(avec le reste de Young)* :

$$\forall x \in I \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots\dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Le DL en $x_0 \in I$ s'écrit :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Ces 2 formules permettent de calculer les DL de beaucoup de fonctions….

Exemples

1. Si $f(x) = e^x$ comme $f'(x) = e^x$ et $f^{(2)}(x) = e^x$ on a : $f(0) = f'(0) = f^{(2)}(0) = e^0 = 1$.

   Dans un voisinage de 0 on a : $e^x = 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1}{2!}x^2 + x^2\varepsilon(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ (DL d'ordre 2 en 0)

2. Si $f(x) = \sin(x)$ comme $f'(x) = \cos(x)$ et $f^{(2)}(x) = -\sin(x)$ et $f^{(3)}(x) = -\cos(x)$

   on a : $f(0) = \sin(0) = 0$ et $f'(0) = \cos(0) = 1$ et $f^{(2)}(0) = -\sin(0) = 0$ et $f^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$

   Dans un voisinage de 0 on a : $\sin(x) = 0 + \frac{1}{1}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$ (DL d'ordre **3**)

3. ATTENTION : Le DL d'ordre **4** en 0 de la fonction sinus (fonction impaire) est : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x)$

   (même partie régulière que DL d'ordre **3**)

2ième méthode : DL d'une primitive ou d'une dérivée :

Soit ***F*** une fonction primitive de la fonction ***f*** sur I (contenant 0)

Si la fonction ***f*** admet un DL d'ordre **n** alors la fonction ***F*** admet un DL d'ordre **n+1** et on a :

si $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots\dots + a_nx^n + x^n\,\varepsilon(x)$

alors $F(x) = F(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots\dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\,\varepsilon_1(x)$ *« intégration terme à terme »*

Exemple : Le DL d'ordre **4** en 0 de $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$

*(lire attentivement les explications en ANNEXE **1** en page **3**)*

Comme $\forall x > -1 \quad F(x) = \ln(1+x)$ est une primitive de $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $]-1;1[$ qui contient 0

ON PEUT en déduire le DL d'ordre **5** en 0 : $\ln(1+x) = \ln(1+0) + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5 + x^5\varepsilon_1(x)$

c'est à dire $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + x^5\varepsilon_1(x)$

DL d'une fonction dérivée : Soit *f* une fonction qui admet un DL d'ordre n en 0

Si la fonction f est dérivable sur I (qui contient 0) et si la fonction dérivée f' admet un DL d'ordre $n-1$ en 0

on a : Si $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots\dots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$

Alors $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + + \dots\dots + na_nx^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon_1(x)$ *« dérivation terme à terme »*

3ième méthode : Les opérations sur les DL de type addition, multiplication, division, composition

Soit les fonctions *f* et *g*

On suppose que ces 2 fonctions ont chacune un DL d'ordre n en 0

Soit P_1 le polynôme tel que $f(x)=P_1(x)+x^n\varepsilon_1(x)$ (la partie régulière de *f*)

Soit P_2 le polynôme tel que $g(x)=P_2(x)+x^n\varepsilon_2(x)$ (la partie régulière de *g*)

On a :

1. $(f+g)(x)=(P_1+P_2)(x)+x^n\varepsilon_3(x)$

P_1+P_2 est la partie régulière du DL d'ordre n de la fonction $f+g$

2. $(f\times g)(x)=\text{Troncate}\left[(P_1\times P_2)(x)\right]+x^n\varepsilon_4(x)$

$\text{Troncate}\left[(P_1\times P_2)(x)\right]$ est un opérateur qui « supprime » tous les monômes de degré $\geq n+1$ du polynôme $P_1\times P_2$

Exemple

Développement limité à l'ordre 3 de $\dfrac{e^x}{1+x}$:

- A l'ordre 3, on a $\begin{cases} e^x = 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+x^3\epsilon_1(x) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0}\epsilon_1(x)=0 \\ \dfrac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^3\epsilon_2(x) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0}\epsilon_2(x)=0 \end{cases}$

- donc $$\begin{aligned}\frac{e^x}{1+x} = e^x\times\frac{1}{1+x} &= \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+x^3\epsilon_1(x)\right)\left(1-x+x^2-x^3+x^3\epsilon_2(x)\right) \\ &= 1-x+x^2-x^3+x-x^2+x^3+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{6}+x^3\epsilon(x) \\ &= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+x^3\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\epsilon(x)=0.\end{aligned}$$

3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\left(\dfrac{P_1}{P_2}\right)(x)+x^n\,\varepsilon_5(x)$ si $g(x)\neq 0$

avec $Q(x)=\left(\dfrac{P_1}{P_2}\right)(x)$ le polynôme de degré n obtenu par la division suivant les puissances croissantes de P_1 par P_2

Exemple : DL d'ordre 3 en 0 de la fonction tangente

$$\tan(x)=\left(\frac{\sin}{\cos}\right)(x)=\left(\frac{x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon_1(x)}{1-\frac{x^2}{2}+x^3\varepsilon_2(x)}\right)=x+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_3(x)$$

4. Par composition on a : $f(ax)=P_1(ax)+x^n\,\varepsilon_6(x)$ pour tout $a\in\mathbb{R}^*$

$f\left(x^p\right)=P_1\left(x^p\right)+x^{n\times p}\,\varepsilon_7(x)$ pour tout $p\in\mathbb{N}^*$

Exemple

Développement limité à l'ordre 7 de $\sin(2x)$:

- $\sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+x^7\epsilon_1(x)$ donc :

$$\sin(2x)=2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}-\frac{(2x)^7}{7!}+x^7\epsilon_2(x)=2x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5-\frac{8}{315}x^7+x^7\epsilon_2(x).$$

Développement limité à l'ordre 6 de $\dfrac{1}{1+x^2}$:

- $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^3\epsilon_1(x)$ donc :

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^6\epsilon_2(x).$$

ANNEXE 1 : Démontrer que le DL d'ordre **n** en 0 de la fonction définie par $x \to \frac{1}{1-x}$ est :

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^n \varepsilon(x)}$$

Il est facile de démontrer que pour $n \geq 1$ *:* $\forall x \neq 1 \quad 1 - x^{n+1} = (1-x)\left(1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n\right)$

A partir de cette égalité, on peut déduire que : $\forall x \neq 1 \quad \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n$

c'est-à-dire $\forall x \neq 1 \quad \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n$

c'est-à-dire $\forall x \neq 1 \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$

***Conclusion** : Posons* $\varepsilon(x) = \frac{x}{1-x}$ *on obtient* $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^n \varepsilon(x)$ *avec* $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

ET par le changement de variable : $x \to -x$ **on obtient le DL d'ordre n en 0 :**

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + ... + (-x)^n + (-x)^n \varepsilon((-x)) = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon_1(x)}$$

***ANNEXE 2** : Interprétation graphique*

Prenons les différents DL de la fonction exponentielle en 0

DL d'ordre 0 : $e^x = 1 + \varepsilon(x)$

DL d'ordre 1 : $e^x = 1 + x + x\varepsilon(x)$

DL d'ordre 2 : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$

DL d'ordre 3 : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$

Graphiquement, on obtient à différents ordres des approximations de la fonction exponentielle au voisinage de 0.

Plus l'ordre est élevée, meilleure est l'approximation !