DERIVATION d'une fonction composée de 2 fonctions réelles

I) Quelques rappels de notions sur les fonctions réelles

$x \in \mathbb{R} \xrightarrow{f} f(x) \in \mathbb{R}$ et *antécédent* $\xrightarrow{f}$ *image*

Si la fonction f n'est pas définie pour certaines valeurs (valeurs interdites), alors il faut définir :
le domaine de définition de la fonction que l'on note D_f

On peut également restreindre l'étude d'une fonction en prenant un sous-ensemble de son domaine de définition (on étudie la fonction uniquement sur une partie de l'ensemble de définition, qu'on appelle par convention : le domaine d'étude de la fonction)

Exemples : La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ est définie sur $\left]-\infty\,;2\right[\cup\left]2\,;+\infty\right[$

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}$ est définie sur $\left]-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\right[$

La fonction $f(x) = \sin(x)$ peut s'étudier sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ (domaine d'étude)

Ensemble d'arrivée d'une fonction (appelé également : Ensemble des «*images*»)

C'est l'ensemble $f\left(D_f\right) = \left\{ y \in \mathbb{R} \quad \textit{tels que} \;\; \exists x \in D_f \quad y = f(x) \right\}$

II) Fonction composée de 2 fonctions réelles

La fonction composée de ***f*** suivie de ***g*** est une fonction notée $g \circ f$ (on dit : « ***g*** *rond* ***f*** »)

Cette fonction est définie par : $x \mapsto f(x) \mapsto g\left[f(x)\right]$

On note : $\forall x \in D_f \quad g \circ f(x) = g\left[f(x)\right]$

Attention aux conditions sur les fonctions :

Si D_f est le domaine de définition de la fonction ***f***

Si D_g est le domaine de définition de la fonction ***g***

ALORS la fonction composée $g \circ f$ **n'est définie que si** $\boxed{x \in D_f}$ **et si** $\boxed{f(x) \in D_g}$

Remarques :

1) Ne pas confondre $g \circ f$ et $f \circ g$ (et en général on a $g \circ f \neq f \circ g$)

2) Le domaine de définition de la fonction $g \circ f$, noté $D_{g \circ f}$, et on a $D_{g \circ f} \subset D_f$

3) $D_{g \circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} \quad \textit{tels que} \;\; x \in D_f \;\; \textit{et} \;\; f(x) \in D_g \right\}$

III) Exemple n°1

Soit les fonctions $f : x \mapsto ax + b$ et $g : x \mapsto cx + d$

Calculons $f \circ g$

La fonction ***f*** est définie sur $D_f = \mathbb{R}$

La fonction ***g*** est définie sur $D_g = \mathbb{R}$

On a $\forall x \in D_f = \mathbb{R}$ ET $f(x) \in D_g = \mathbb{R}$ donc $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

On a : $g \circ f(x) = g\left[f(x)\right] = g\left[ax + b\right] = c\left[ax + b\right] + d = acx + cb + d = c(ax + b) + d$

Conclusion : $g \circ f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$: c'est la fonction : $x \mapsto c(ax + b) + d$

Exemple n°2 Soit la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ On a : $D_f = \mathbb{R}$

Ecrivons la fonction f comme une fonction composée de **3** fonctions *u v et w, c'est à dire* $f = u \circ v \circ w$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \text{ donc}$$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Posons $w : x \mapsto x + \frac{b}{2a}$ et $v : x \mapsto x^2$ et $u : x \mapsto ax - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

On obtient $f(x) = u \circ v \circ w(x)$

Remarque **:** les **3** fonctions u v et w sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$

On a $w(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ *c'est à dire* $w(\mathbb{R}) \subset D_v$ ET $v(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ *c'est à dire* $v(\mathbb{R}) \subset D_u$

donc il n'y a aucun problème pour pourvoir les composer, et on a $D_{u \circ v \circ w} = \mathbb{R}$

Exemple n°3 : Soit les fonctions $f : x \mapsto -\sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{2x-1}$

Définir la fonction composée $g \circ f$

La fonction f est définie sur $D_f = \mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$

La fonction g est définie sur $D_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Comme $\forall x \in D_f$ **on a** $f(x) \in]-\infty;0] \subset \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ on peut donc composer ces 2 fonctions car $f(D_f) \subset D_g$

La fonction composée $g \circ f$ est donc bien définie et on a $D_{g \circ f} = D_f = [0;+\infty[$

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g\left(-\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\left(-\sqrt{x}\right) - 1} = \frac{1}{-2\sqrt{x} - 1} = \frac{-1}{2\sqrt{x} + 1}$$

Conclusion : $g \circ f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$ **:** $x \mapsto \frac{-1}{2\sqrt{x}+1}$

Remarque : Essayons maintenant de « *définir* » la fonction composée : $f \circ g$

Comme pour $x \in D_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ **,** on a $g(x) \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

La condition $g(D_g) \subset D_f$ **n'étant pas vérifiée,** la fonction $f \circ g$ **n'est pas définie**.

Pour pouvoir définir la fonction $f \circ g$ *, il est nécessaire de restreindre l'étude de cette fonction sur l'intervalle*

$\mathrm{I} = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ *car on a :* $\forall\, x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ $\mathrm{g(x)} \in]0;+\infty[\subset \mathrm{D_f}$

ET on obtient **:** si $\mathrm{D}_{f \circ g} = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ *alors* $f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{2x-1}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2x-1}}$

III) Dérivation d'une fonction composée de 2 fonctions réelles

Soit $\boldsymbol{u}$ une fonction dérivable sur un intervalle $\boldsymbol{I}$ inclus dans $\mathbb{R}$
et soit $\boldsymbol{f}$ une fonction dérivable sur un intervalle $\boldsymbol{J}$ tel que $\boldsymbol{u(I)\subset J}$

alors la fonction composée $f\circ u$ est dérivable sur l'intervalle $\boldsymbol{I}$ et : $(f\circ u)'=(f'\circ u)\times u'$

Formule à retenir par cœur : $\boxed{\forall x\in I\ \ (f\circ u)'(x)=f'[u(x)]\times u'(x)}$

(la démonstration de cette formule se ***trouve en annexe page 5*** *du document. Vous trouverez* ***en annexe page 6*** *le calcul de la dérivée de la fonction réciproque quand* ***f*** *est une bijection (hors programme))*

Exemples :

1ier exemple : Soit la fonction $h: x\mapsto (ax+b)^2$
On pose $u(x)=ax+b$ **et** $f(x)=x^2$
Comme les fonctions f et u sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$
la fonction $h=f\circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est dérivable sur $\mathbb{R}$

Comme **:** $\forall x\in\mathbb{R}\ \ f'(x)=2x$ **et** $u'(x)=a$
on obtient : $h'(x)=f'[u(x)]\times u'(x)=2[ax+b]\times a=2a(ax+b)$

2ième exemple : Soit la fonction $h: x\mapsto\sqrt{1+x^2}$
On pose $u(x)=1+x^2$ **et** $f(x)=\sqrt{x}$
Comme la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ et que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$
ET comme $\forall x\in\mathbb{R}\ \ u(x)=1+x^2\geq 0$, la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$

Comme la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$: $\forall x\in\mathbb{R}\ \ u'(x)=2x$
Comme la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}=]0;+\infty[$: $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\ \ f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
ET comme $\forall x\in\mathbb{R}\ \ u(x)=1+x^2>0$, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$
On obtient : $h'(x)=f'[u(x)]\times u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\times 2x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

IV) Etude du sens de variation de la fonction composée $f\circ u$

1) Si $\boldsymbol{u}$ est **croissante** sur un intervalle **I** et si f est **croissante** sur l'intervalle $\boldsymbol{u}$**(I)** alors $\boldsymbol{f\circ u}$ est **croissante** sur I
2) Si $\boldsymbol{u}$ est **décroissante** sur un intervalle **I** et si f est **décroissante** sur l'intervalle $\boldsymbol{u}$**(I)** alors $\boldsymbol{f\circ u}$ est **croissante** sur I
3) Si $\boldsymbol{u}$ est **croissante** sur un intervalle **I** et si f est **décroissante** sur l'intervalle $\boldsymbol{u}$**(I)** alors $\boldsymbol{f\circ u}$ est **décroissante** sur I
4) Si $\boldsymbol{u}$ est **décroissante** sur un intervalle **I** et si f est **croissante** sur l'intervalle $\boldsymbol{u}$**(I)** alors $\boldsymbol{f\circ u}$ est **décroissante** sur I

Remarque : Ces différentes propriétés se démontrent très facilement en utilisant la formule :

$$\boxed{\forall x\in I\ \ (f\circ u)'(x)=f'[u(x)]\times u'(x)}$$

ET en étudiant le signe de $(f\circ u)'(x)$ quand $x\in$ I en fonction des signes de $f'[u(x)]$ et de $u'(x)$

V) Application : calculs de fonctions dérivées en utilisant cette formule

1$^{\text{iere}}$ application : Soit ***u*** une fonction non nulle et dérivable sur un intervalle ***I***

alors la fonction ***f*** définie par $\forall x \in I \quad f(x)=\dfrac{1}{u(x)}$ est dérivable sur lõintervalle ***I***

et on a : $\forall x \in I \quad f'(x)=\dfrac{-u'(x)}{u^2(x)}$ Formule à connaître par cî ur : $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=\dfrac{-u'}{u^2}$

Exemple : $f(x)=\dfrac{1}{(x^2-4)}$

Cette fonction est définie et dérivable sur $]-\infty;-2[\ \cup\ ]-2;2[\ \cup\ ]2;+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2-4)^2}$

2$^{\text{ième}}$ application : Soit ***u*** une fonction dérivable sur un intervalle ***I***

alors la fonction ***f*** définie par $\forall x \in I \ \ f(x)=u^n(x)$ (**avec** $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^*$) est dérivable sur lõintervalle ***I***

et on a : $\forall x \in I \ \ f'(x)=nu^{(n-1)}(x)\times u'(x)$

Remarque : Cette formule est valable avec un exposant entier négatif si et seulement si la fonction ***u*** est une fonction non nulle dérivable sur lõintervalle ***I***

Exemple 1 :

$$f(x)=(\underset{\underset{u}{\uparrow}}{3x+4})^{\underset{\underset{n}{\uparrow}}{9}}$$

$$f'(x)=\underset{\underset{n}{\uparrow}}{9}\times\underset{\underset{u'}{\uparrow}}{3}(\underset{\underset{u}{\uparrow}}{3x+4})^{\underset{\underset{n-1}{\uparrow}}{8}}=27(3x+4)^8$$

Exemple 2 :

$$f(x)=\sin^5 x=(\underset{\underset{u}{\uparrow}}{\sin x})^{\underset{\underset{n}{\uparrow}}{5}}$$

$$f'(x)=\underset{\underset{n}{\uparrow}}{5}\times\underset{\underset{u'}{\uparrow}}{\cos x}(\underset{\underset{u}{\uparrow}}{\sin x})^{\underset{\underset{n-1}{\uparrow}}{4}}=5\cos x\sin^4 x$$

Exemple 4 : avec un exposant négatif

$$f(x)=\frac{1}{(4x^2+5x-3)^{10}}$$

transformation en forme u^n

$$f(x)=(4x^2+5x-3)^{-10}$$

$$f'(x)=-10(8x+5)(4x^2+5x-3)^{-10-1}$$

$$=-10(8x+5)(4x^2+5x-3)^{-11}$$

$$=\frac{-10(8x+5)}{(4x^2+5x-3)^{11}}$$

écriture sans exposant négatif

3$^{\text{ième}}$ application : Soit ***u*** une fonction positive non nulle sur un intervalle ***I***

alors la fonction ***f*** définie par $\forall x \in I \quad f(x)=\sqrt{u(x)}$ est définie et dérivable sur lõintervalle ***I***

et on a : $\forall x \in I \quad f'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ Formule à connaître par cî ur : $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Annexe n°1 : Démonstration de la formule permettant de calculer la fonction dérivée d'une fonction composée

Soit $\boldsymbol{u}$ une fonction dérivable sur un intervalle $\boldsymbol{I}$
Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction dérivable sur un intervalle $\boldsymbol{J}$ tel que $\boldsymbol{u(I)\subset J}$

Démontrons que la fonction $f\circ u$ est **dérivable** sur lôintervalle $\boldsymbol{I}$ et que : $\left(f\circ u\right)'=\left(f'\circ u\right)\times u'$

Rappel: une fonction $\boldsymbol{g}$ est dérivable sur un intervalle $\boldsymbol{I}$ alors $\forall a\in I$ et $\forall x\in I$: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$

Pour démontrer cette formule, il faut calculer pour $\forall a\in I$ et $\forall x\in I$: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(f\circ u)(x)-(f\circ u)(a)}{x-a}$

Comme $\dfrac{(f\circ u)(x)-(f\circ u)(a)}{x-a}=\dfrac{f[u(x)]-f[u(a)]}{x-a}=\dfrac{f[u(x)]-f[u(a)]}{u(x)-u(a)}\times\dfrac{u(x)-u(a)}{x-a}$

Donc $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(f\circ u)(x)-(f\circ u)(a)}{x-a}=\underbrace{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f[u(x)]-f[u(a)]}{u(x)-u(a)}}_{\text{calcul 1}}\times\underbrace{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)-u(a)}{x-a}}_{\text{calcul 2}}$

Calcul 1

Comme la fonction $\boldsymbol{u}$ est continue (car dérivable) sur lôintervalle $\boldsymbol{I}$: $\lim\limits_{x\to a}u(x)=u(a)$

donc $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f[u(x)]-f[u(a)]}{u(x)-u(a)}=\lim\limits_{u(x)\to u(a)}\dfrac{f[u(x)]-f[u(a)]}{u(x)-u(a)}$

Comme la fonction $\boldsymbol{f}$ est dérivable sur lôintervalle $\boldsymbol{u(I)\subset J}$: $\lim\limits_{u(x)\to u(a)}\dfrac{f[u(x)]-f[u(a)]}{u(x)-u(a)}=f'[u(a)]$

Calcul 2

Comme la fonction $\boldsymbol{u}$ est dérivable sur lôintervalle $\boldsymbol{I}$: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)-u(a)}{x-a}=u'(a)$

Conclusion : $\forall a\in I$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(f\circ u)(x)-(f\circ u)(a)}{x-a}=f'[u(a)]\times u'(a)$

Annexe n°2 : Formule de la fonction dérivée dȇune fonction réciproque

Soit f une **bijection** dérivable définie sur un intervalle $\boldsymbol{I}$ vers un intervalle $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{f(I)}$

On note f^{-1} la fonction réciproque de f (fonction de $\boldsymbol{J}$ sur $\boldsymbol{I}$)

Soit $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{I}$

***Hypothèse :** la fonction f est continue et est dérivable en* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{I}$ tel que $\mathbf{f'(x_0) \neq 0}$

***Démontrons** que la fonction f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et que* $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{\left(f' \circ f^{-1}\right)(y_0)}$

Il est facile de démontrer que la fonction f^{-1} est continue en $y_0 = f\left(x_0\right)$ car la fonction f est continue en x_0 : cȇst-à-dire il est facile de démontrer que : $\lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$

Calculons le taux de variation de la fonction f^{-1} entre $y_0 = f(x_0)$ et $y = f(x)$ (appartenant à $\boldsymbol{J}$)

cȇst à dire : $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$

Comme $x = f^{-1}(y)$ et $x_0 = f^{-1}(y_0)$ on a : $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \dfrac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$

Comme $\lim\limits_{x \to x_0} y = y_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{y \to y_0} x = x_0$

On peut donc écrire que :

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{\left(f' \circ f^{-1}\right)(y_0)}$$

Ce qui prouve que la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en y_0

Commentaire : Si pour tout x de lȇintervalle $\boldsymbol{I}$ on a $f'(x) \neq 0$

alors f^{-1} est dérivable sur lȇintervalle $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{f(I)}$ et on a : $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{\left(f' \circ f^{-1}\right)}$

Exemple : La fonction $f(x) = x^2$ est une bijection de $[\ 0;+\infty[$ sur $[\ 0;+\infty[$

La fonction réciproque de cette fonction f est la fonction $g(x) = \sqrt{x}$

Montrons que la fonction g est dérivable sur $]\ 0\ ;+\infty\ [$ et que $\forall x \in]0;+\infty[\ \ g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Explications :

On a $\forall x \in [0;+\infty[\ \ f'(x) = 2x$

On a donc $f'(0) = 0$ et donc la fonction $g = f^{-1}$ nȇst pas dérivable en 0

ET en appliquant la formule on obtient : $\forall y \in]0;+\infty[\ \ g'(y) = \left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \dfrac{1}{2f^{-1}(y)} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$