DERIVATION d'une fonction composée de 2 fonctions

Annexe n°1 : Démonstration de la formule permettant de calculer la fonction dérivée d'une fonction composée

Soit $\boldsymbol{u}$ une fonction dérivable sur un intervalle $\boldsymbol{I}$
Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction dérivable sur un intervalle $\boldsymbol{J}$ tel que $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{I})\subset \boldsymbol{J}$

Démontrons que la fonction $f\circ u$ est **dérivable** sur l'intervalle $\boldsymbol{I}$ et que : $\left(f\circ u\right)'=\left(f'\circ u\right)\times u'$

Rappel: une fonction $\boldsymbol{g}$ est dérivable sur un intervalle $\boldsymbol{I}$ alors $\forall a\in I$ et $\forall x\in I$: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$

Pour démontrer cette formule, il faut calculer pour $\forall a\in I$ et $\forall x\in I$: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(f\circ u)(x)-(f\circ u)(a)}{x-a}$

Comme $\dfrac{(f\circ u)(x)-(f\circ u)(a)}{x-a}=\dfrac{f\left[u(x)\right]-f\left[u(a)\right]}{x-a}=\dfrac{f\left[u(x)\right]-f\left[u(a)\right]}{u(x)-u(a)}\times\dfrac{u(x)-u(a)}{x-a}$

Donc $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(f\circ u)(x)-(f\circ u)(a)}{x-a}=\underbrace{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f\left[u(x)\right]-f\left[u(a)\right]}{u(x)-u(a)}}_{\text{calcul 1}}\times\underbrace{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)-u(a)}{x-a}}_{\text{calcul 2}}$

Calcul 1

Comme la fonction $\boldsymbol{u}$ est continue (car dérivable) sur l'intervalle $\boldsymbol{I}$: $\lim\limits_{x\to a}u(x)=u(a)$

donc $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f\left[u(x)\right]-f\left[u(a)\right]}{u(x)-u(a)}=\lim\limits_{u(x)\to u(a)}\dfrac{f\left[u(x)\right]-f\left[u(a)\right]}{u(x)-u(a)}$

Comme la fonction $\boldsymbol{f}$ est dérivable sur l'intervalle $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{I})\subset \boldsymbol{J}$: $\lim\limits_{u(x)\to u(a)}\dfrac{f\left[u(x)\right]-f\left[u(a)\right]}{u(x)-u(a)}=f'\left[u(a)\right]$

Calcul 2

Comme la fonction $\boldsymbol{u}$ est dérivable sur l'intervalle $\boldsymbol{I}$: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)-u(a)}{x-a}=u'(a)$

Conclusion : $\forall a\in I$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(f\circ u)(x)-(f\circ u)(a)}{x-a}=f'\left[u(a)\right]\times u'(a)$