DERIVATION d'une fonction composée de 2 fonctions

Annexe n°2 : Formule de la fonction dérivée dûne fonction réciproque

Soit f une **bijection** dérivable définie sur un intervalle I vers un intervalle $J = f(I)$

On note f^{-1} la fonction réciproque de f (fonction de J sur I)

Soit $x_0 \in I$

***Hypothèse* : la fonction f est continue et est dérivable en** $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) \neq 0$

Démontrons* que la fonction** f^{-1} ***est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ ***et que*** $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{\left(f' \circ f^{-1}\right)(y_0)}$

Il est facile de démontrer que la fonction f^{-1} est continue en $y_0 = f\left(x_0\right)$ car la fonction f est continue en x_0 : cêst-à-dire il est facile de démontrer que : $\lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$

Calculons le taux de variation de la fonction f^{-1} entre $y_0 = f(x_0)$ et $y = f(x)$ (appartenant à J)

cêst à dire : $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$

Comme $x = f^{-1}(y)$ et $x_0 = f^{-1}(y_0)$ on a : $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \dfrac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$

Comme $\lim\limits_{x \to x_0} y = y_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{y \to y_0} x = x_0$

On peut donc écrire que :

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{\left(f' \circ f^{-1}\right)(y_0)}$$

Ce qui prouve que la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en y_0

Commentaire : Si pour tout x de lôintervalle I on a $f'(x) \neq 0$

alors f^{-1} est dérivable sur lôintervalle $J = f(I)$ et on a : $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{\left(f' \circ f^{-1}\right)}$

Exemple : La fonction $f(x) = x^2$ est une bijection de $[\,0;+\infty[$ sur $[\,0;+\infty[$

La fonction réciproque de cette fonction f est la fonction $g(x) = \sqrt{x}$

Montrons que la fonction g *est dérivable sur* $]\,0\,;+\infty\,[$ *et que* $\forall x \in]0;+\infty[\quad g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Explications :

On a $\forall x \in [0;+\infty[\quad f'(x) = 2x$

On a donc $f'(0) = 0$ et donc la fonction $g = f^{-1}$ nôest pas dérivable en 0

ET en appliquant la formule on obtient : $\forall y \in]0;+\infty[\quad g'(y) = \left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \dfrac{1}{2f^{-1}(y)} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$