DERIVATION d'une fonction composée de 2 fonctions

I) Quelques rappels sur les fonctions

$x \in \mathbb{R} \xrightarrow{f} f(x) \in \mathbb{R}$ et $antécédent \xrightarrow{f} image$

Si la fonction f n'est pas définie pour certaines valeurs (valeurs interdites), alors il faut définir :
le domaine de définition de la fonction que l'on note D_f

On peut également restreindre l'étude d'une fonction en prenant un sous-ensemble de son domaine de définition (on étudie la fonction uniquement sur une partie de l'ensemble de définition, qu'on appelle par convention : le domaine d'étude de la fonction)

Exemples : La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ est définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}$ est définie sur $\left]-\sqrt{3};\sqrt{3}\right[$

La fonction $f(x) = \sin(x)$ peut s'étudier sur l'intervalle $[0;\pi]$ (domaine d'étude)

Ensemble d'arrivée d'une fonction (appelé également : Ensemble des «*images*»)
C'est l'ensemble $f\left(D_f\right) = \left\{y \in \mathbb{R} \quad tels\ que\ \exists x \in D_f \quad y = f(x)\right\}$

II) Fonction composée de 2 fonctions

La fonction composée de ***f*** suivie de ***g*** est une fonction notée $g \circ f$ (on dit : « ***g*** *rond* ***f*** »)

Cette fonction est définie par la succession : $x \mapsto f(x) = X \mapsto g(X) = g[\,f(x)\,]$

On écrit : $si \quad x \in D \quad alors \quad g \circ f(x) = g[\,f(x)\,]$

Attention aux conditions sur les fonctions :

Si D_f est le domaine de définition de la fonction ***f***

Si D_g est le domaine de définition de la fonction ***g***

ALORS la fonction composée $g \circ f$ **n'est définie que si** $\boxed{x \in D_f}$ **et si** $\boxed{f(x) \in D_g}$

Remarques : **1)** Ne pas confondre $g \circ f$ et $f \circ g$ (et en général on a $g \circ f \neq f \circ g$)

2) Le domaine de définition de la fonction $g \circ f$, noté $D_{g \circ f}$ **,** et on a $D_{g \circ f} \subset D_f$

3) $D_{g \circ f} = \left\{x \in \mathbb{R} \quad tels\ que\ \ x \in D_f \ \ et\ \ f(x) \in D_g\right\}$

III) Exemple n°1

Soit les fonctions $f : x \mapsto ax + b$ et $g : x \mapsto cx + d$

Calculons $f \circ g$

La fonction ***f*** est définie sur $D_f = \mathbb{R}$

La fonction ***g*** est définie sur $D_g = \mathbb{R}$

On a $\forall x \in D_f = \mathbb{R}$ ET $f(x) \in D_g = \mathbb{R}$ donc $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

On a : $g \circ f(x) = g[\,f(x)] = g[ax+b] = c[ax+b] + d = acx + cb + d = c(ax+b) + d$

Conclusion : $g \circ f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$: c'est la fonction : $x \mapsto c(ax+b) + d$

Exemple n°2 Soit la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ On a : $D_f = \mathbb{R}$

Ecrivons la fonction f comme une fonction composée de **3** fonctions *u v et w, c'est à dire* $f = u \circ v \circ w$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \text{ donc}$$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Posons $w : x \mapsto x + \frac{b}{2a}$ et $v : x \mapsto x^2$ et $u : x \mapsto ax - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

On obtient $f(x) = u \circ v \circ w(x)$

Remarque **:** les **3** fonctions u v et w sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$

On a $w(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ *c'est à dire* $w(\mathbb{R}) \subset D_v$ ET $v(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ *c'est à dire* $v(\mathbb{R}) \subset D_u$

donc il n'y a aucun problème pour pourvoir les composer, et on a $D_{u \circ v \circ w} = \mathbb{R}$

Exemple n°3 : Soit les fonctions $f : x \mapsto -\sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{2x-1}$

Définir la fonction composée $g \circ f$

La fonction f est définie sur $D_f = \mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$

La fonction g est définie sur $D_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Comme $\forall x \in D_f$ **on a** $f(x) \in]-\infty;0] \subset \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ on peut donc composer ces 2 fonctions car $f(D_f) \subset D_g$

La fonction composée $g \circ f$ est donc bien définie et on a $D_{g \circ f} = D_f = [0;+\infty[$

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g\left(-\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\left(-\sqrt{x}\right)-1} = \frac{1}{-2\sqrt{x}-1} = \frac{-1}{2\sqrt{x}+1}$$

Conclusion : $g \circ f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$ **:** $x \mapsto \frac{-1}{2\sqrt{x}+1}$

Remarque : Essayons maintenant de « *définir* » la fonction composée : $f \circ g$

Comme pour $x \in D_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ **,** on a $g(x) \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

La condition $g(D_g) \subset D_f$ **n'étant pas vérifiée,** la fonction $f \circ g$ **n'est pas définie**.

Pour pouvoir définir la fonction $f \circ g$ *, il est nécessaire de restreindre l'étude de cette fonction sur l'intervalle*

$\mathrm{I} = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ *car on a :* $\forall\, x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ $\quad g(x) \in]0;+\infty[\subset D_f$

ET on obtient **:** si $D_{f \circ g} = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ *alors* $f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{2x-1}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2x-1}}$