Produit scalaire : Résumé de cours et méthodes

Le plan est muni d'un repère orthonormal.

1 Introduction

DÉFINITION

le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le **réel** noté $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ défini par :
$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\right)$.

1-1 Produit scalaire et orthogonalité

PROPRIÉTÉ

Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux équivaut à dire que $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$

1-2 Règles de calcul

PROPRIÉTÉS

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$:
- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{0}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{0}=0$
- Pour tout réel k, $(k\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}\cdot(k\overrightarrow{v})=k\times(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})$
- $\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$
- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}$ est noté $\overrightarrow{u}^2$ et est appelé carré scalaire de $\overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u}^2=\|\overrightarrow{u}\|^2$ (carré de la longueur du vecteur $\overrightarrow{u}$)
- $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2=\overrightarrow{u}^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2$ (cela signifie que $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}$)
- $(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2=\overrightarrow{u}^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2$
- $(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=\overrightarrow{u}^2-\overrightarrow{v}^2$

2 Produit scalaire et géométrie analytique

PROPRIÉTÉ

Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=xx'+yy'$ et $\overrightarrow{u}^2=x^2+y^2$

► *Exemple :* soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=3\times2+(-1)\times6=6-6=0$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

2-1 Applications aux équations de droite

PROPRIÉTÉS

- Rappel : toute droite admet une équation (dite cartésienne) de la forme $ax+by+c=0$ (avec $(a,b)\neq(0,0)$) et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite.
- On appelle vecteur normal d'une droite tout vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul et orthogonal à un vecteur directeur de la droite.
- Si une droite admet une équation de la forme $ax+by+c=0$ alors $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de cette droite et, réciproquement, si une droite admet le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ comme vecteur normal alors elle admet une équation de la forme $ax+by+c=0$.

► *Exemple :* Soit $A\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$.

• Déterminons une équation de la médiatrice de $[BC]$.

Le vecteur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la médiatrice qui admet donc une équation de la forme $-2x-8y+c=0$.

La médiatrice doit passer par $I\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, le milieu de $[BC]$.

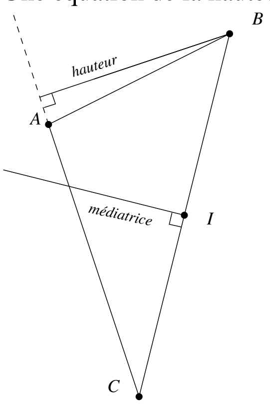
On en déduit que $-2\times 0-8\times(-1)+c=0 \Leftrightarrow c=-8$.

Une équation de la médiatrice est donc : $-2x-8y-8=0$.

• Déterminons une équation de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de cette hauteur qui admet donc une équation de la forme $2x-6y+c=0$. La hauteur passe par le point B. On en déduit que $2\times 1-6\times 3+c=0 \Leftrightarrow c=16$.

Une équation de la hauteur est donc : $2x-6y+16=0$.



► **Remarque :** La droite D d'équation $ax+by+c=0$ est perpendiculaire à la droite D' d'équation $a'x+b'y+c'=0$ si et seulement si un vecteur directeur de D est orthogonal à un vecteur directeur de D'. Ainsi, $D\perp D' \Leftrightarrow \overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (-b)\times(-b')+a\times a'=0 \Leftrightarrow aa'+bb'=0$.

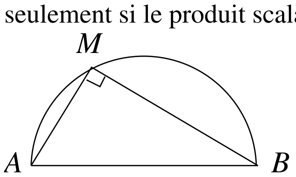
2-2 Applications aux équations de cercle

Pour déterminer une équation du cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et de rayon R, il suffit d'exprimer qu'un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartient au cercle si et seulement si $\Omega M^2=R^2$.

Une équation est donc : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

► *Exemple :* une équation du cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et de rayon 3 est : $(x-1)^2+(y-2)^2=9$.

Pour déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$, il suffit d'exprimer qu'un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartient au cercle si et seulement si le produit scalaire $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}$ est nul.



► *Exemple :* $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$ avec $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \end{pmatrix} = 0$. Cela équivaut à $(x-1)(x-3)+(y+2)(y-4)=0 \Leftrightarrow x^2-x-3x+3+y^2-4y+2y-8=0$.
Une équation du cercle est donc : $x^2+y^2-4x-2y-5=0$.

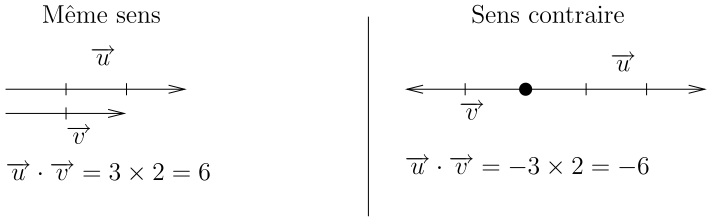
3 Produit scalaire et géométrie

3-1 Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires

PROPRIÉTÉ

• Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls et de même sens alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$ (produit des longueurs)
• Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls et de sens contraires alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$ (opposé du produit des longueurs)
• Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

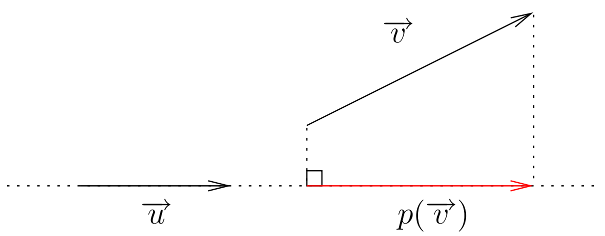
Exemples



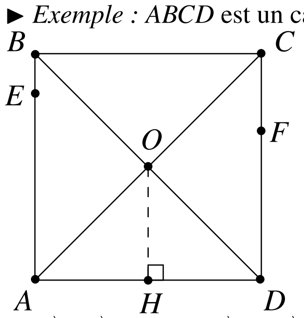
3-2 Produit scalaire de deux vecteurs non colinéaires

PROPRIÉTÉ

Etant donné deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Si on note $p(\overrightarrow{v})$, la projection orthogonale de $\overrightarrow{v}$ sur une droite portant $\overrightarrow{u}$, alors on a : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot p(\overrightarrow{v})$
(on est donc ramené au cas de deux vecteurs colinéaires)



► *Exemple :* $ABCD$ est un carré avec $AB=3$



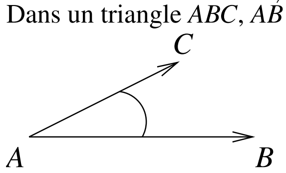
• $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ car $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.
• $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = -3 \times 3 = -9$ car $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires et de sens contraires.
• $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} = 3 \times 1,5 = 4,5$ car le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AO}$ sur (AD) est $\overrightarrow{AH}$ et que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens.
• Les produits scalaires $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EF}$ sont tous égaux entre eux. En effet, si on projette orthogonalement $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$

et $\overrightarrow{EF}$ sur (AD) on obtient à chaque fois $\overrightarrow{AD}$. Donc tous ces produits scalaires sont égaux à $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \times 3 = 9$.

4 Produit scalaire et angles

PROPRIÉTÉ

Dans un triangle ABC, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.



► **Remarque :** De façon plus générale, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

► *Exemple :* Soit $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $AB = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $AC = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 1 + 1 \times 3 = 5$, donc $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \dfrac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \dfrac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On peut en déduire que la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est égale à $\dfrac{\pi}{4}$.

PROPRIÉTÉ

Théorème d'Al Kashi
Dans un triangle ABC, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

5 Lignes de niveau

a) Ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$

PROPRIÉTÉ

Soit I, le milieu du segment $[AB]$ (avec $A \neq B$).

Pour tout point M, on a $MA^2 + MB^2 = 2IM^2 + \dfrac{AB^2}{2}$ *(Théorème de la médiane)*.

Etant donné un réel k, on en déduit que l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$ est un cercle, ou un point ou l'ensemble vide.

► *Exemple :* Soit A et B deux points tels que $AB = 2$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 20$.
On utilise le théorème de la médiane :
$MA^2 + MB^2 = 20 \Leftrightarrow 2IM^2 + \dfrac{AB^2}{2} = 20 \Leftrightarrow 2IM^2 + \dfrac{4}{2} = 20 \Leftrightarrow IM^2 = 9 \Leftrightarrow IM = 3$ (car $IM > 0$).
L'ensemble E est donc le cercle de centre I et de rayon 3.

b) Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

► **Méthode générale :** on décompose $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en passant par I le milieu de $[AB]$.

► *Exemple :* Soit A et B deux points tels que $AB = 4$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12$.
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = 12$. Or, $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$.
On a donc, $\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right) = 12 \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 12 \Leftrightarrow MI^2 - 2^2 = 12$ (car $IA = \dfrac{AB}{2}$).
On en déduit que $M \in E \Leftrightarrow MI^2 = 16 \Leftrightarrow MI = 4$. E est donc le cercle de centre I et de rayon 4.

c) Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{u}=k$

► **Méthode générale :** On cherche un point particulier H appartenant à l'ensemble. On a alors $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{u}=k$. Ainsi, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{u}=k\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{u}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AH}\right)\cdot\overrightarrow{u}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{u}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{HM}\perp\overrightarrow{u}$.
L'ensemble est alors la droite passant par H et de vecteur normal $\overrightarrow{u}$.

► *Exemple :* Soit A et B deux points tels que $AB=3$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=-6$.
Soit H le point de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient de sens contraires et tel que $AH\times AB=6\Leftrightarrow AH=\dfrac{6}{3}=2$.
Ainsi, on a bien $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=-6$.
Dès lors, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=-6\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AH}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{HM}\perp\overrightarrow{AB}$.
L'ensemble E est alors la droite perpendiculaire à (AB) et passant par H.