**Exercice sur la notion de CERCLE ( Chapitre PRODUIT SCALAIRE )** ( Niveau 2 , difficile )

*Cet exercice consiste à trouver l'ensemble des points M d'un plan qui vérifient la relation*
$MA^2 + MB^2 = 20$

**Partie A de l'exercice** : Soit A et B 2 points et soit $I$ le milieu du segment [ A , B ]

**a )** Rappel : On a les 2 relations vectorielles $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AI} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{2}$

Démontrer que pour un point M quelconque du plan on a la relation : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

**b )** En utilisant la relation de Chasles ( en faisant intervenir le point $I$ )

Démontrer que $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IB}^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + \dfrac{\overrightarrow{AB}^2}{2}$

**c )** En utilisant la question **b** ) démontrer que $MA^2 + MB^2 = 20 \Leftrightarrow 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2} = 20$

*( cette relation est appelée : la relation du théorème de la médiane )*

**Partie B de l'exercice** :

**d )** En utilisant la question **c )** démontrer que si A et B sont 2 points tels que $AB = 2$ *(unités)* alors l'ensemble des points $M$ qui vérifient la relation $MA^2 + MB^2 = 20$ est un cercle de centre $I$ et de rayon $r = 3$ *(unités)*

**e )** Soit $\left( x_M ; y_M ; \right)$ les coordonnées d'un point M et soit $\left( a \; ; b \right)$ les coordonnées du point $I$ dans un repère orthonormé du plan

Démontrer que M appartient au cercle de centre $I$ et de rayon $r = 3$ *(unités)* si et seulement si
$(x_M - a)^2 + (y_M - b)^2 = 3^2$

**f )** Soit $\left( x_M ; y_M ; \right)$ les coordonnées d'un point M dans un repère orthonormé du plan

Démontrer que la relation $x_M{}^2 + y_M{}^2 - 4\,x_M - 2\,y_M - 4 = 0$

est le cercle de centre le point $I$ de coordonnées $\left( 2 \; ; 1 \right)$ et de rayon $r = 3$ *(unités)*