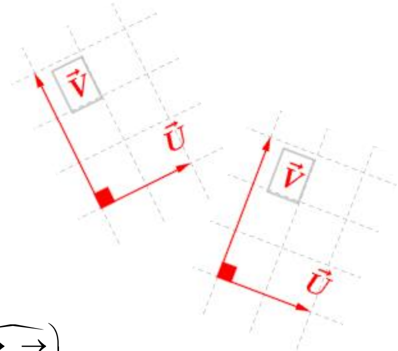
FICHE : le produit scalaire

FORMULES sur le produit scalaire de 2 vecteurs

I) $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\vec{u}\,,\vec{v}\right)}$ *voir explications sur la formule n° **1***

II) Dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

$\begin{cases} \vec{u} \text{ a pour coordonnées } (x, y) \\ \vec{v} \text{ a pour coordonnées } (x', y') \end{cases}$ alors $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'}$ *voir explications sur la formule n° **2***



III) A quoi sert le produit scalaire **si** $\vec{u} \neq \vec{0}$ **et** $\vec{v} \neq \vec{0}$

$\boxed{\textbf{si } \vec{u} \neq \vec{0} \textbf{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \qquad \vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0}$

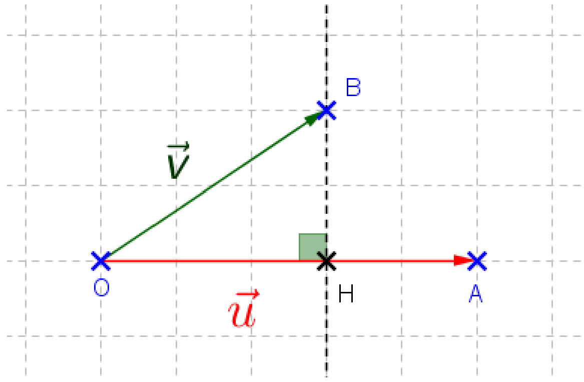
(Le produit scalaire permet de tester si 2 vecteurs __non nuls__ sont orthogonaux)

<u>DEMO</u> : **si** $\vec{u} \neq \vec{0}$ **et** $\vec{v} \neq \vec{0}$ $\quad \vec{u} \perp \vec{v} \iff \left(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}}\right) = \mp\dfrac{\pi}{2} \iff \cos\left(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}}\right) = 0$

<u>Explications sur la formule n° 1</u> : (Notion de projection orthogonale)

La formule $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\vec{u}\,,\vec{v}\right)$ peut être illustrée « géométriquement »

Le vecteur $\vec{OH}$ est appelé : « **projection orthogonale du vecteur** $\vec{v}$ **sur le vecteur** $\vec{u}$ »



Et on a $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{OH}}$

1) Si l'angle $\left(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}}\right)$ est *« aigu »* alors $\cos\left(\vec{u}\,,\vec{v}\right) = \dfrac{OH}{\left\|\vec{v}\right\|}$

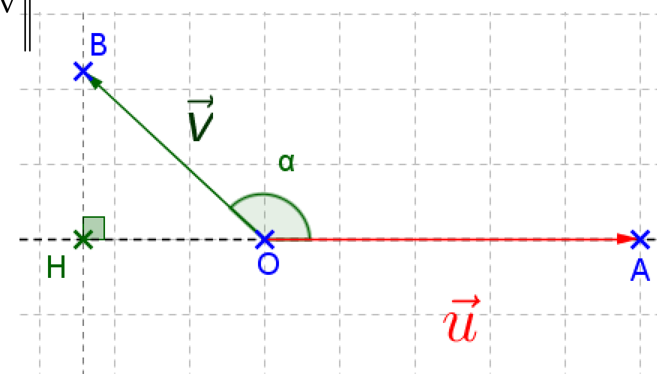
Et on a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{OH} = OA \times OH$

(avec un angle aigu)

2) Si l'angle $\left(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}}\right)$ est *« obtu »* alors $\cos\left(\vec{u}\,,\vec{v}\right) = -\dfrac{OH}{\left\|\vec{v}\right\|}$

Et on a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{OH} = -OA \times OH$

(avec un angle obtu)



Explications sur la formule n° 2

Dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

DEMO : si $\vec{u}$ a pour coordonnées (x, y)

et si $\vec{v}$ a pour coordonnées (x', y') dans la base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ alors on a :

$$\begin{cases} \vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \\ \vec{v} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j} \end{cases}$$

donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j}\right)\cdot\left(x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j}\right) = xx'\,\vec{i}\cdot\vec{i} + (xy' + yx')\,\vec{i}\cdot\vec{j} + yy'\,\vec{j}\cdot\vec{j}$

comme la base **EST** orthonormale

$$\begin{cases} \vec{i}\cdot\vec{i} = \left\|\vec{i}\right\| \times \left\|\vec{i}\right\| \times \cos\left(\vec{i}, \vec{i}\right) = \left\|\vec{i}\right\|^2 \times \cos(0) = 1^2 \times 1 = 1 \quad \text{et} \quad \vec{j}\cdot\vec{j} = \left\|\vec{j}\right\|^2 = 1 \\ \vec{i} \perp \vec{j} \Rightarrow \vec{i}\cdot\vec{j} = 0 \end{cases}$$

et on obtient la formule $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'}$

NORME d'un vecteur

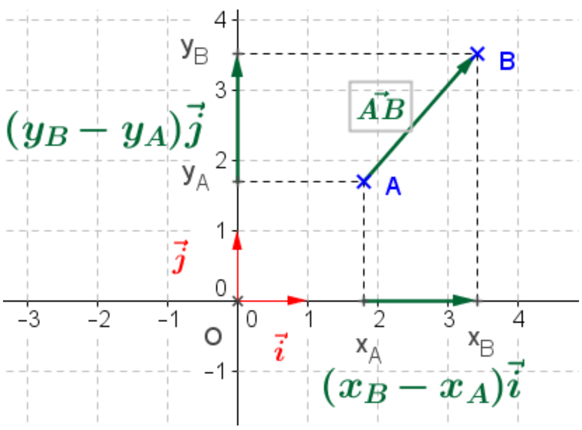
$\left\|\vec{u}\right\| \geq 0$ et $\left\|\vec{u}\right\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ et si $\left\|\vec{u}\right\| \neq 0$ alors $\vec{v} = \dfrac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|}$ est unitaire

$$\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{u} = xx + yy = x^2 + y^2 \\ \vec{u}\cdot\vec{u} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{u}\right\| \times \cos\left(\vec{u}, \vec{u}\right) = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{u}\right\| \times \cos(0) = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{u}\right\| \times 1 = \left\|\vec{u}\right\|^2 \end{cases}$$

Et on a $\left\|\vec{u}\right\|^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ car $\left\|\ \right\| \geq 0$ *(formule à connaitre par cœur)*

et retenir qu'on peut également écrire que : $\left\|\vec{u}\right\|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^{\,2}$

Formules à retenir



$\vec{AB} = (x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j}$

$$\boxed{AB = \left\|\vec{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

$$\boxed{AB^2 = \left\|\vec{AB}\right\|^2 = \vec{AB}\cdot\vec{AB} = \vec{AB}^{\,2}}$$

$$\begin{cases} \vec{AB}\cdot\vec{i} = \left[(x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j}\right]\cdot\vec{i} = (x_B - x_A) \\ \vec{AB}\cdot\vec{j} = \left[(x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j}\right]\cdot\vec{j} = (y_B - y_A) \end{cases}$$

Autres formules à comprendre et à retenir

Comme le produit scalaire vérifie $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$

On a $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = \left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\times\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$

Donc $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left[\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 - \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}\right]$

En remplaçant «*les carrés scalaires* » par «*les normes au carré* » c'est-à-dire $\vec{u}^{\,2}$ par $\left\|\vec{u}\right\|^2$

On obtient que $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left[\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right]$

Formules à comprendre et à savoir retrouver :

Comme $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\times\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$ on obtient que $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left[\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 - \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}\right]$

c.à.d. $\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left[\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right]}$

Autres formules :

Ces formules permettent d'exprimer un produit scalaire uniquement en utilisant la norme des vecteurs

$$\begin{cases} \vec{u}\,.\,\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left[\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right] \\ \vec{u}\,.\,\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left[\left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right] \\ \vec{u}\,.\,\vec{v} = \dfrac{1}{4}\left[\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right] \end{cases}$$

Remarque : Pour simplifier l'écriture , généralement on note $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^{\,2}$ qui est appelé « carré scalaire »

Attention à bien comprendre ce que veut dire cette notation (par exemple ne pas écrire que $\sqrt{\vec{u}^{\,2}} = \vec{u}$!!)

De plus on a : $AB^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \overrightarrow{AB}^{\,2}$

BIEN COMPRENDRE CE QUE VEUT DIRE CES EGALITES

car il y a **3 notions** : une distance entre 2 points, la norme d'un vecteur et le carré scalaire de ce vecteur