«Calcul de la VITESSE » d'un parachutiste. Equation différentielle générée en appliquant la 2ième ***LOI de NEWTON***

EXPLICATIONS / AIDE pour résoudre l'exercice n°7 : vitesse d'un parachutiste

Un parachutiste tombe à une vitesse de 55 ms^{-1} au moment où son parachute s'ouvre.

On fixe l'origine du temps ($t = 0$, en secondes) à ce moment là.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on note $v(t)$ la vitesse (en ms^{-1}) du parachutiste à l'instant t.

On admet que la résistance de l'air est donnée par : $R = \dfrac{Pv^2}{25}$

où P est le poids du parachutiste avec son équipement. ($P = mg$, m = masse et $g = 9{,}81\ ms^{-2}$)

1. Démontrer que v est solution, sur $\mathbb{R}_+$, de l'équation différentielle :

$$(E) : v' = g\left(1 - \frac{v^2}{25}\right)$$

2. On suppose que $v > 5$ sur $\mathbb{R}_+$, et on pose sur $\mathbb{R}_+$: $z = \dfrac{1}{v-5}$

   Déterminer une équation différentielle satisfaite par z sur $\mathbb{R}_+$ et la résoudre.

3. En déduire une expression de $v(t)$ en fonction de t et préciser sa limite lorsque t tend vers $+\infty$.

La 2ième loi de Newton : ***«L'axe de projection» des différents vecteurs forces est l' axe vertical orienté de haut en bas***

La loi de Newton dit que la somme des forces appliquées à un corps est égale à la masse de ce corps multiplié par son accélération. Soit

$$\underbrace{\sum_{i=1} F_i}_{} = m\,a$$

$$mg - kv^2 = m\,a$$

Fi représente une des forces appliquée au corps,

m est la masse du corps (*mg* est la force de gravité qui tire le corps vers le bas),

a est l'accélération du corps,

k est le coefficient de résistance de l'air,

v est la vitesse de chute libre du parachutiste (kv^2 représente la résistance de l'air).

Modélisation de « **4 phases (*4 équations différentielles*)** » durant ce saut en parachute :

1ière phase : Au temps $t_0 = 0\,s$, le parachutiste saute par exemple d'un avion. On peut considérer que la vitesse verticale du parachutiste à la sortie de l'avion est nulle *(vitesse vers le sol terrestre)*: $v(0) = 0$ (et que $x(0) = 0$)
Lors de cette 1ière phase, si on considère également que la force de frottement due à l'air est négligeable, ALORS la vitesse du parachutiste durant cette 1ière phase augmente de manière proportionnelle au temps : $v(t) = gt$

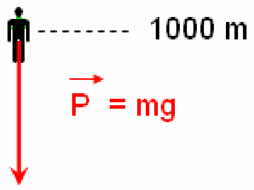
2ième phase : Au temps t_2 , quand la vitesse verticale atteinte par le parachutiste « ***fait que la force de frottement due à l'air compense celle de son poids*** *(avec son équipement)* ALORS la vitesse verticale du parachutiste vers le sol terrestre reste constante et est égale à $v(t_2)$ (« *chute libre à vitesse constante* »)

3ième phase : Au temps t_3 , quand le parachutiste déclanche l'ouverture de son parachute, ALORS la force de frottement due à l'air *(notamment celle du parachute qui est ouvert)* devient supérieure à la force de gravité due au poids du parachutiste et donc durant cette 3ième phase, la vitesse verticale du parachutiste diminue….

4ième phase : Au temps t_4 , quand la vitesse du parachutiste fait que la force de frottement due à l'air, compense de nouveau celle du au poids du parachutiste (et de son équipement…), le parachutiste à partir de cet instant conserve une vitesse constante et touche donc le sol terrestre à cette vitesse. Durant cette 4ièmephase $v(t) = v(t_4)$

vitesse initiale :

$v_0 = v(t_0) = 0 \quad m/s$



PREMIERE PHASE DU SAUT

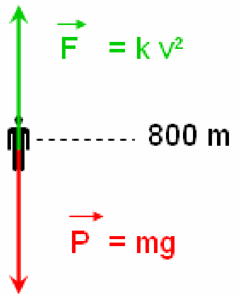
Durant cette phase, la somme des forces n'est pas nulle donc le vecteur vitesse varie dans le sens du vecteur « somme des forces »

$$m\frac{dv}{dt}(t) = mg \quad \Rightarrow \quad v(t) = gt + Cte$$

donc le vecteur vitesse augmente

$v(t_1) = gt_1 \quad (m/s)$

Instant où la vitesse fait que la force de frottement due à l'air est égale à la force due au poids..... ET la vitesse du parachutiste devient constante.....



$v(t_2) = Cte = v(t_1) = gt_1 \quad (m/s)$

DEUXIEME PHASE DU SAUT

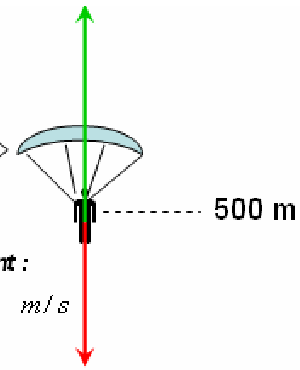
Durant cette phase, comme le vecteur « somme des forces » est nul, le vecteur vitesse ne varie pas.

$$m\frac{dv}{dt}(t) = mg - kv^2(t) \quad \textbf{\textit{avec}} \quad \boldsymbol{mg = kv^2(t)}$$

$$m\frac{dv}{dt}(t) = 0 \Rightarrow v(t) = Cte = v(t_1) = gt_1$$

donc le vecteur vitesse est constant

OUVERTURE du PARACHUTE à l'instant t_3



vitesse à cet instant :

$v(t_3) = v(t_2) = gt_1 \quad m/s$

TROISIEME PHASE DU SAUT

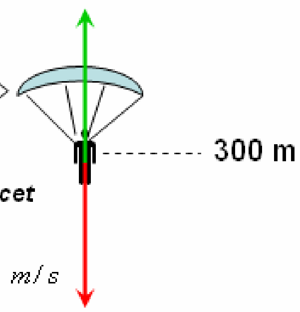
Durant cette phase, la somme des forces n'est pas nulle donc le vecteur vitesse varie dans le sens du vecteur « somme des forces »

$$m\frac{dv}{dt}(t) = mg - kv^2(t) \quad \textbf{\textit{avec}} \quad \boldsymbol{mg < kv^2(t)}$$

donc le vecteur vitesse diminue

$v(t_4) = ? \quad (v(t_4) < v(t_3))$

t_4 = instant où la vitesse redevient constante



vitesse à partir de cet instant :

$v(t) = Cte = v(t_4) \quad m/s$

QUATRIEME PHASE DU SAUT

Durant cette phase, comme le vecteur « somme des forces » est nul, le vecteur vitesse ne varie pas.

$$m\frac{dv}{dt}(t) = mg - kv^2(t) \quad \textbf{\textit{avec}} \quad \boldsymbol{mg = kv^2(t)}$$

$$m\frac{dv}{dt}(t) = 0 \Rightarrow v(t) = v(t_4) = v_4$$

donc le vecteur vitesse est constant

Equation différentielle à résoudre dans cet exercice (équation durant la phase n°3 du saut)

Soit $x(t)$ *la fonction* *« déplacement verticale instantanée du parachutiste »* : **position sur un axe vertical orienté de haut en bas**. Cette fonction dépend de la variable temps t et la 2ième loi de Newton permet d'écrire une équation différentielle….
En effet la dérivation de cette fonction $t \to x(t)$ permet d'obtenir **2 autres fonctions de la variable** t :

- $v(t) = x'(t) = \dfrac{dx}{dt}(t)$: *« fonction vitesse verticale instantanée du parachutiste à un instant* t *»*
- $a(t) = x''(t) = \dfrac{dv}{dt}(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2}(t)$: *« fonction accélération verticale instantanée du parachutiste à un instant* t *»*

A PARTIR DE L'INSTANT OU LE PARACHUTISTE OUVRE SON PARACHUTE, l'équation différentielle, conformément à la loi de Newton, est : $mg - kv^2(t) = mv'(t)$, c'est-à-dire : $v'(t) + \dfrac{k}{m}v^2(t) = g$ équation différentielle **(E)**

Commentaire : l'équation différentielle **(E)** de la variable **v(t)** EST NON LINEAIRE
Pour résoudre cette équation, il est NECESSAIRE de faire plusieurs changements de variable...

Axiome : Dans cet exercice le coefficient k de la force de frottement dans l'air est approchée par : $k \approx \dfrac{mg}{25}$

En appliquant cet axiome, on obtient : $v'(t) + \dfrac{k}{m}v^2(t) = g \iff v'(t) + \dfrac{g}{25}v^2(t) = g$ équation **(E1)**

1ier changement de variable : la fonction $u(t) = \sqrt{\dfrac{mg}{k}} = \sqrt{25} = 5$ est *une solution particulière* de l'équation **(E1)**

Explications : $u(t) = 5 \Rightarrow u'(t) = 0$ et on obtient que : $u'(t) + \dfrac{g}{25}u^2(t) = g$ équation **(E2)**

ET si on fait : **(E1) – (E2)** on obtient :

$$v'(t) + \frac{g}{25}v^2(t) - u'(t) - \frac{g}{25}u^2(t) = 0 \iff (v-u)'(t) + \frac{g}{25}\left(v^2(t) - u^2(t)\right) = 0$$

Le changement de variable : $w(t) = (v-u)(t) = v(t) - 5$ permet d'écrire une *nouvelle* équation **(E3) :**

$$w'(t) + \frac{g}{25}\left(((w+u)(t))^2 - u^2(t)\right) = 0 \iff w'(t) + \frac{g}{25}w^2(t) + \frac{g}{25}2w(t)u(t) = 0 \iff w'(t) + \frac{g}{25}w^2(t) + \frac{10g}{25}w(t) = 0$$

2ième changement de variable :

Si $\forall t \quad w(t) \neq 0$, on peut écrire que **(E3)** $\iff \dfrac{w'(t)}{w^2(t)} + \dfrac{g}{25} + \dfrac{10g}{25}\dfrac{1}{w(t)} = 0$ équation **(E4)**

ET le changement de variable : $z(t) = \dfrac{1}{w(t)}$, qui en dérivant donne $z'(t) = -\dfrac{w'(t)}{w^2(t)}$, permet d'écrire

une équation linéaire du 1ier ordre à coefficient constant : $-z'(t) + \dfrac{g}{25} + \dfrac{10g}{25}z(t) = 0$

c'est-à-dire l'équation **(E5) :** $z'(t) = \dfrac{10g}{25}z(t) + \dfrac{g}{25}$ ***dont on connaît les solutions:*** $z(t) = Ce^{\frac{10g}{25}t} - \dfrac{1}{10}$ avec $z(t) = \dfrac{1}{v(t)-5}$.

Et la condition initiale $z(0) = \dfrac{1}{v(0)-5} = \dfrac{1}{55-5} = \dfrac{1}{50}$ permet de calculer la constante : $C - \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{50} \Rightarrow C = \dfrac{3}{25}$

Conclusion : Le calcul de la vitesse du parachutiste quand il touche le sol terrestre est *« supérieure à »* : $5 \ m/s$
Explication : $\lim\limits_{t\to+\infty} z(t) = +\infty$ *(car* $C > 0$ *)* et donc on peut en déduire que : $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 5 \quad m/s$