SOLUTION

Partie A - Loi de Malthus

1. On a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $$f(t) = N_0\mathbf{e}^{at}$$
2. Par définition de T : $$f(T) = 2N_0 = N_0\mathbf{e}^{aT}$$

   D'où : $$T = \frac{\ln(2)}{a}$$

   On en déduit : $$f(t) = N_0\, e^{\frac{t}{T}\ln(2)} = N_0\, 2^{\frac{t}{T}}$$
3. Voir ci-dessous.

Partie B

1. D'après les résultats précédents :

$$g(t) = \frac{1}{1 + A\mathbf{e}^{-at}} \quad \text{où } A \text{ est une constante}$$

2. a. On a : $$0{,}01 = N_0 = g(0) = \frac{1}{1+A}$$

   D'où : $$A = 99$$

   Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a donc : $$g(t) = \frac{1}{1+99\mathbf{e}^{-at}}$$

   b. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbf{e}^{-at} = 0$, il vient : $$\lim_{t\to+\infty} g(t) = 1$$

   De plus : $$1 + 99\,\mathbf{e}^{-at} > 1$$

   D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $[1, +\infty[$:

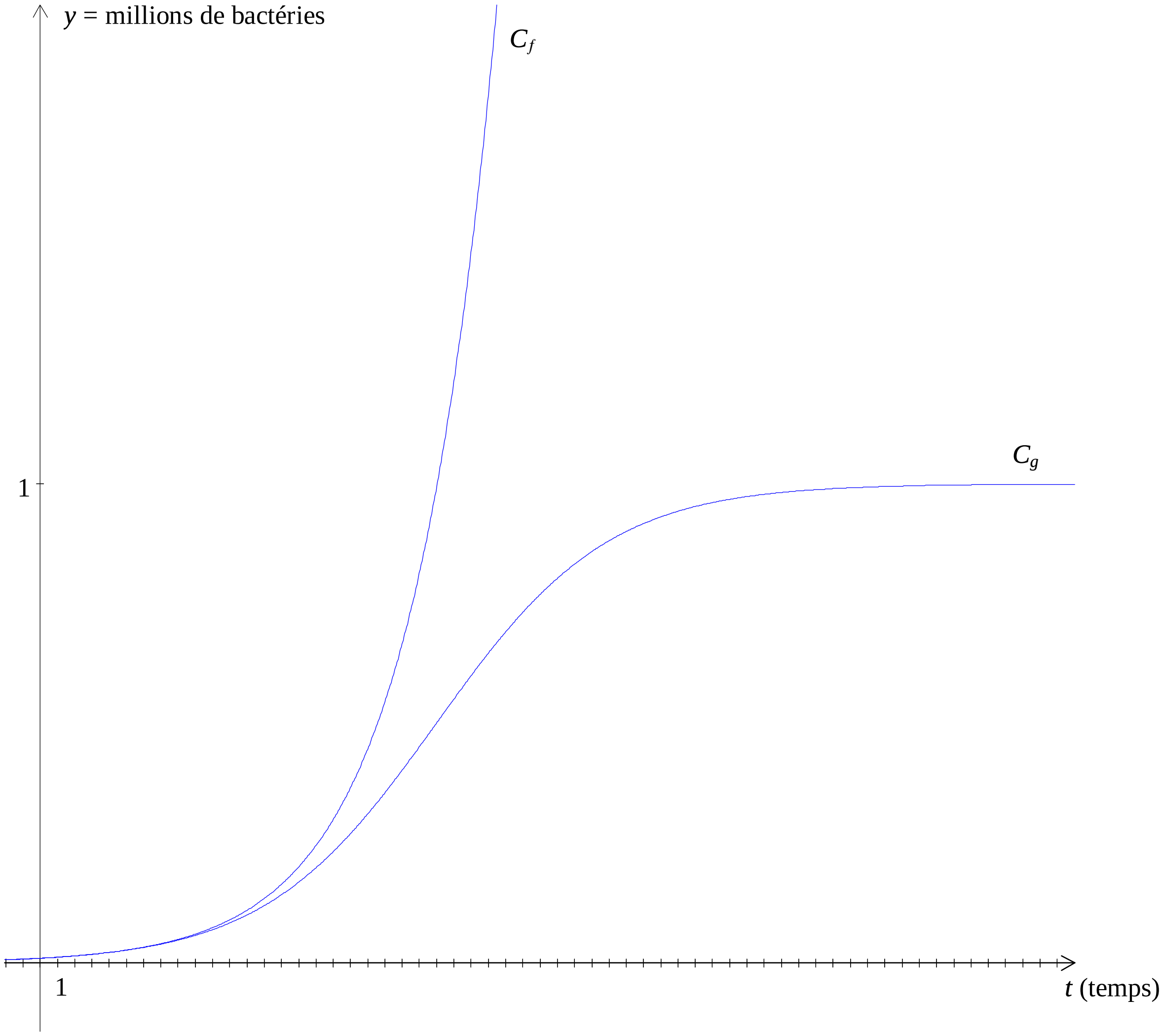
$$g(t) < 1 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+$$

   c. Puisque $0 < g < 1$ sur $\mathbb{R}_+$, $a > 0$ et $g' = ag(1 - g)$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit :

$$g' > 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

d.



On constate que le premier modèle (de Malthus) n'est pas bon (sauf au début) car les bactéries se développant en milieu confiné, elles ne peuvent pas se multiplier infiniment. Le second modèle (de Verhulst) a l'avantage de bien faire apparaître un comportement asymptotique particulier (le nombre de bactéries fini par se stabiliser). En effet, les ressources en éléments nutritifs étant limitées, le nombre de bactéries tend à se stabiliser.