6.2. Équations différentielles non résolubles (formellement) en Terminale S

Dans ce paragraphe, nous allons juste traiter un exemple avec une méthode numérique.

On considère le problème différentiel :

$$(P) : \begin{cases} y' + 2xy = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On admet que ce problème différentiel (P) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$[1].

L'équation différentielle $y' + 2xy = 1$ n'est pas à coefficients constants. Nous ne savons donc pas la résoudre, à notre niveau. On se propose donc, de tracer une ébauche de la courbe de sa solution par une méthode approchée dite "Méthode d"Euler".

Rappel du principe de la méthode d'Euler

LA CLÉ :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I alors, pour tout réel x de I et tout réel h, petit, tel que $x + h$ soit dans I, on a :

$$\boxed{\boldsymbol{f(x+h) \simeq f(x) + hf'(x)}}$$

En effet, on sait que :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varphi(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

(Voir le cours sur le calcul différentiel)

L'approximation faite est donc d'autant meilleure que h est petit.

LE PRINCIPE ITÉRATIF :

On ne connaît pas d'expression de la fonction f. On connaît juste une équation différentielle dont elle est solution et on dispose également d'une condition initiale. L'idée d'Euler est de dire : "si on connaît la valeur de $f(x)$ et de $f'(x)$, on peut avoir une bonne approximation de f un peu plus loin (en $x + h$)".

Or, ici, nous connaissons $f(0) = 0$ (condition initiale) mais aussi $f'(0)$! En effet, on sait que f est une solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$. On a donc $f'(x) = 1 - 2xf(x)$ d'où $f'(0) = 1$. On peut donc connaître $f(h)$ où h est un pas que nous fixerons arbitrairement en fonction de la précision recherchée.

Et ainsi, de proche en proche, on peut avoir une approximation des valeurs de la fonction et donc tracer une courbe qui l'approche.

LES CALCULS

Commençons avec un pas $h = 0{,}1$.

On a donc, pour tout réel x : $\qquad f(x + 0{,}1) \simeq f(x) + 0{,}1f'(x)$

Où $f'(x)$ se calcule avec l'équation différentielle :

$$f'(x) = 1 - 2xf(x)$$

---

[1] Cette unique solution est assurée par le théorème de "Cauchy-Lipschitz linéaire d'ordre 1" dont la démonstration est très ardue lorsque les coefficients de l'équation différentielle sont variables (et c'est le cas ici)

MISE EN ŒUVRE AVEC UN TABLEUR

Entrer la valeur du pas h (ici 0,1) dans cette cellule

Entrer la valeur de $f(0)$ dans cette cellule

Entrer dans cette cellule la valeur de x pour laquelle on souhaite commencer les calculs

	A	B	C
1	PAS h	0,1	
2	Valeur de f(0)	0	
3			
4	x	f(x)	f'(x)
5	0	0	1
6	0,1	0,1	0,98
7	0,2	0,198	0,921
8	0,3	...	...
9	0,4		
10	0,5		
11	0,6		

Entrer ici la formule :
=$B$2

Entrer ici la formule :
=1-2*A5*B5
puis étirer vers le bas

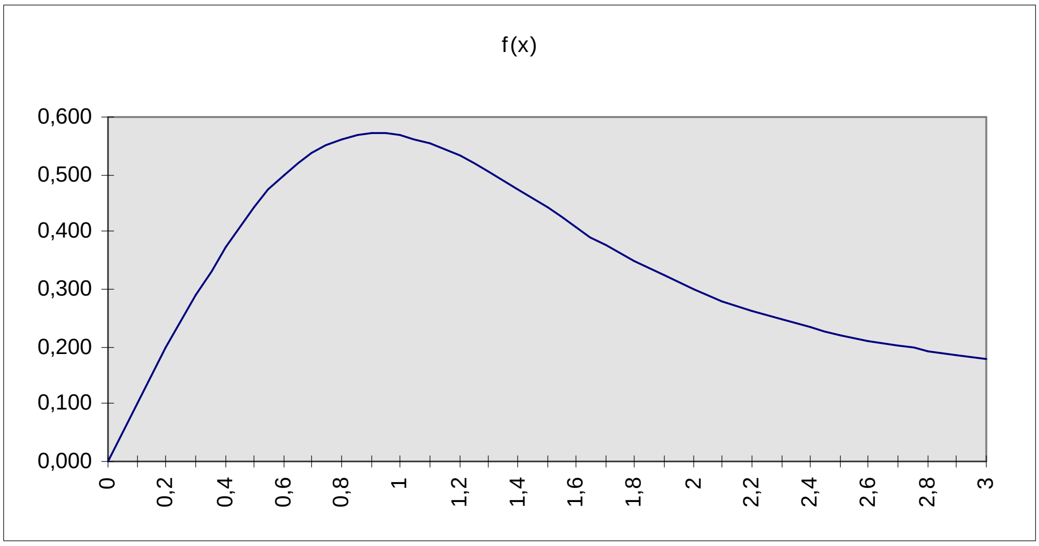
Entrer ici la formule :
=A5+$B$1
puis étirer vers le bas

Entrer ici la formule :
=B5+0,1*C5
puis étirer vers le bas

RÉSULTATS

x	$f(x)$	$f'(x) = 1 - 2xf(x)$	$f(x+0{,}1) \simeq f(x) + 0{,}1f'(x)$
0	0,000	1,000	0,100
0,1	0,100	0,980	0,198
0,2	0,198	0,921	0,290
0,3	0,290	0,826	0,373
0,4	0,373	0,702	0,443
0,5	0,443	0,557	0,499
0,6	0,499	0,402	0,539
0,7	0,539	0,246	0,563
0,8	0,563	0,099	0,573
0,9	0,573	-0,032	0,570
1	0,570	-0,140	0,556
1,1	0,556	-0,223	0,534
1,2	0,534	-0,281	0,506
1,3	0,506	-0,315	0,474
1,4	0,474	-0,328	0,441
1,5	0,441	-0,324	0,409
1,6	0,409	-0,309	0,378
1,7	0,378	-0,286	0,350
1,8	0,350	-0,258	0,324
1,9	0,324	-0,230	0,301
2	0,301	-0,203	0,280

Courbe $C_{0,1}$ approchant f sur l'intervalle [0 ; 2] :



On peut recommencer les calculs avec un pas plus fin (par exemple $h = 0{,}01$) pour avoir plus de précision.

On peut aussi choisir un pas négatif pour avoir l'allure de la courbe sur $\mathbb{R}_-$.

Pour information, une expression de la fonction solution au problème différentiel donné est :

$$f(x) = \mathbf{e}^{-x^2} \int_0^x \mathbf{e}^{t^2}\, \mathrm{d}t$$

7. Complément 1 (Hors programme). Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre : $y'' + ay' + by = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$

Dans tout ce qui suit, nous noterons (E) l'équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (\text{où } a, b \in \mathbb{R})$$

On note r_1 et r_2 les racines (éventuellement complexes) de l'équation du second degré $r^2 + ar + b = 0$.

On rappelle (ou on vérifiera facilement) que : $r_1 + r_2 = -a$ et $r_1 r_2 = b$

<u>7.1. Théorème</u> *Structure de l'ensemble des solutions (espace vectoriel de dimension 2)*

Soit I un intervalle.

1. Soient f_1 et f_2 deux solutions sur I de l'équation différentielle (E). Alors, pour toutes constantes A et B, les fonctions de la forme $Af_1 + Bf_2$ sont également des solutions sur I de (E).
2. Si f_1 et f_2 sont des solutions indépendantes[(1)] de (E) sur I, alors les solutions sur I de l'équation différentielle (E) sont **toutes** de la forme $Af_1 + Bf_2$ (où A et B sont des constantes).

[(1)] f_1 et f_2 indépendantes sur I signifie : il n'existe pas de réel k tel que $f_2 = kf_1$ ou $f_1 = kf_2$ sur I. Dans le cas contraire (lorsque k existe), on dit que f_1 et f_2 sont liées.