ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES - MODÈLES D'ÉVOLUTION

1. Introduction - Notion d'équation différentielle - Solution d'une équation différentielle

Une <u>équation différentielle</u> est une équation :

- dont l'inconnue est une fonction (généralement notée y ou z ou autre lettre)
- dans laquelle apparaît certaines des dérivées de y (dérivée première y' ou dérivées d'ordre supérieur y'', ...).

<u>Exemples</u> : trouver mentalement, au moins une fonction solution sur $\mathbb{R}$, des équations différentielles suivantes :

On devrait, de manière plus cohérente noter l'équation différentielle $y'(x) = \sin x$ au lieu de $y' = \sin x$, mais la coutume a voulu, qu'exceptionnellement, on tolère de ne pas écrire la variable de la fonction inconnue...

$y' = \sin(x)$	$(y = -\cos(x) + k$ où $k \in \mathbb{R})$
$y' = 3y$	$(y = k\,\mathbf{e}^{3x}$ où $k \in \mathbb{R})$
$y' = 1 + \mathbf{e}^{x}$	$(y = x + \mathbf{e}^{x} + k$ où $k \in \mathbb{R})$
$y' = y$	$(y = k\,\mathbf{e}^{x}$ où $k \in \mathbb{R})$
$y'' = \cos(x)$	$(y = -\cos(x) + ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R})$
$y'' = y$	$(y = A\,\mathbf{e}^{x} + B\,\mathbf{e}^{-x}$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2)$

<u>Remarques</u> :

- Rechercher les primitives[1] d'une fonction continue f sur un intervalle I, c'est résoudre, sur I, l'équation différentielle : $$y' = f(x)$$
- La notion d'intervalle dans la résolution d'une équation différentielle est fondamentale. Si on change d'intervalle, on peut très bien obtenir d'autre solutions. Par exemple, si on se place sur l'intervalle $]0, +\infty[$, l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{x}$ a pour solutions les fonctions $y : x \mapsto \ln(x) + K$ (K est une constante). Alors que sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, les solutions sont les fonctions $y : x \mapsto \ln(-x) + K$.

Il est donc nécessaire de bien définir ce qu'est une solution d'une équation différentielle.

<u>1.1. Définition</u>

On appelle <u>solution</u> d'une équation différentielle (E) un couple (f, I) où f est une fonction et I un intervalle tels que f vérifie (E) sur I. On dira : f est une solution de (E) **sur *I***.

<u>Résoudre</u> une équation différentielle sur un intervalle I, c'est trouver toutes les fonctions solutions de (E) sur I.

Si aucune précision n'est donnée sur l'intervalle I, on considérera qu'il s'agit de $I = \mathbb{R}$.

On distingue plusieurs types d'équations différentielles :

- Les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants sans second membre :

  exemple : $y' + 5y = 0$
- Les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants avec second membre :

  exemple : $y' + 5y = \mathbf{e}^{x}$
- Les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre :

  exemple : $2y'' - 3y' + 5y = 0$

---
[1] Voir la leçon sur le calcul intégral.

- Les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre :

$$\text{exemple : } 2y'' - 3y' + 5y = \sin(x)$$

- Il existe aussi des équations différentielles à coefficients variables :

$$\text{exemple : } y'' + \sin(x)\,y' - \mathbf{e}^{x}\,y = 0$$

- Ainsi que des équations différentielles non linéaires :

$$\text{exemple : } y'' \times y' - y = 0$$

<u>1.2. Remarque</u> :

Une équation différentielle (E) est dite <u>linéaire</u> lorsque son équation sans second membre associée (E_0) vérifie les deux assertions suivantes :

- pour toutes solutions f et g de (E_0) sur un intervalle I, la fonction $f + g$ est aussi solution de (E_0) sur I
- pour toute solution f de (E_0) sur I et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est aussi solution de (E_0) sur I

<u>Exemples</u> :

1. L'équation différentielle $(E) : y' = ay + b$ est linéaire. En effet :
   - Soient f et g des solutions, sur un intervalle I, de l'équation sans second membre associée $(E_0) : y' = ay$.

     On a donc : $$f' = af \text{ sur } I$$ $$g' = ag \text{ sur } I$$

     En ajoutant membre à membre, il vient, par linéarité de la dérivée :

     $$(f + g)' = a(f + g) \text{ sur } I$$

     Donc la fonction $f + g$ est aussi solution de (E_0) sur I.
   - Soient f une solution de (E_0) sur un intervalle I et λ un réel.

     On a donc : $$f' = af \text{ sur } I$$

     En multipliant par λ, on obtient : $$(\lambda f)' = a(\lambda f) \text{ sur } I$$

     Donc la fonction λf est aussi solution de (E_0) sur I.
2. L'équation différentielle $(E) : y' = y(1 - y)$ n'est pas linéaire. En effet, considérons une solution non nulle[(1)] y de (E) sur un intervalle I. Montrons que la fonction $z = 2y$ n'est pas solution de (E) sur I. Si elle l'était, on aurait : $$z' = z(1 - z) \text{ sur } I$$ $$2y' = 2y(1 - 2y) \text{ sur } I$$

   Mais comme y est solution de (E) : $2y(1 - y) = 2y(1 - 2y)$ sur I

   Soit $x \in I$ tel que $y(x) \neq 0$ (existe par hypothèse). En simplifiant par $2y(x)$, il reste alors :

   $$1 - y(x) = 1 - 2y(x)$$ $$y(x) = 2y(x)$$

   Et toujours en simplifiant par $y(x) \neq 0$, on aboutit à une absurdité.

   La fonction $z = 2y$ n'est donc pas solution de (E) sur I. L'équation (E) est non linéaire.

(1) On verra plus loin dans cette leçon que de telles solutions existent.