3. Équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants avec second membre constant $y' = ay + b$ ($a \neq 0$)

3.1. Théorème

Soient a et b deux réels avec a non nul.

Soit (E) l'équation différentielle : $y' = ay + b$

Les solutions de (E), sur $\mathbb{R}$, sont les fonctions y définies par :

$$y(x) = C\,\mathbf{e}^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{où } C \text{ est une constante quelconque}$$

Dans certains ouvrages, cette équation différentielle est notée :

$y' - ay = b$

ou : $y' + ay = b$

(de façon à bien isoler le second membre)

Attention, dans le dernier cas, le rôle de a est opposé.

Démonstration :

Nous remarquons que la fonction p, définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$p = -\frac{b}{a}$$

est une solution particulière de (E).

(En effet, on a $p' = 0 = ap + b$)

Soit y une solution quelconque de (E). (On sait qu'il en existe au moins une : p)

On a, sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} y' = ay + b \\ p' = ap + b \end{cases}$

En retranchant membre à membre : $(y - p)' = a(y - p)$

Donc $y - p$ est une solution de l'équation différentielle $y' = ay$, d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y(x) - p(x) = C\,\mathbf{e}^{ax} \quad \text{où } C \text{ est une constante}$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $y(x) = C\,\mathbf{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$

La technique utilisée ci-contre est à connaître. Elle servira dans de nombreuses situations :

1) On détermine une solution particulière p de l'équation (E). (L'énoncé donne souvent les indications nécessaires).

2) On montre qu'une fonction y est solution de (E) si et seulement si la fonction $(y - p)$ est solution de l'équation sans second membre associée (E_0).

3) Comme, en général, on connaît les solutions de l'équation sans second membre associée, on en déduit que les solutions y de (E) s'écrivent comme la somme des solutions de (E_0) et de la solution particulière p.

Exemples :

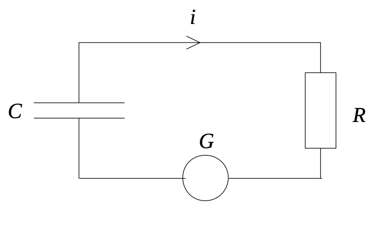
1. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle (E) : $\sqrt{2}\,y' - 2y = 1$

   On écrit (E) sous la forme : $y' = \sqrt{2}\,y + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   (E) est donc de la forme $y' = ay + b$ avec $a = \sqrt{2}$ et $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ses solutions, sur $\mathbb{R}$, sont donc de la forme :

$$y(x) = C\,\mathbf{e}^{\sqrt{2}x} - \frac{1}{2} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

2. Considérons un circuit électrique constitué d'un générateur G (délivrant une tension E), d'un condensateur (de capacité C) et d'une résistance R :



D'après la loi d'additivité des tensions, on a : $u_C + u_R = u_G = E$

Notons $i(t)$ l'intensité du courant électrique dans le circuit à l'instant t.

On sait que : $$u_C(t) = \frac{q(t)}{C} \quad \text{et} \quad u_R(t) = R\,i(t) = R\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$$

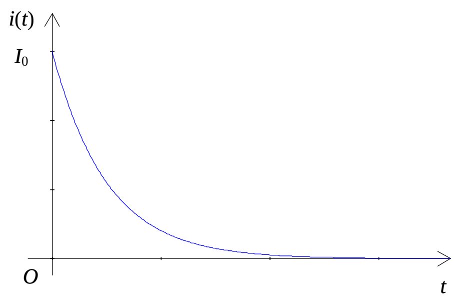
D'où : $$q(t) = EC - RC\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC}q(t) + \frac{E}{R}$$

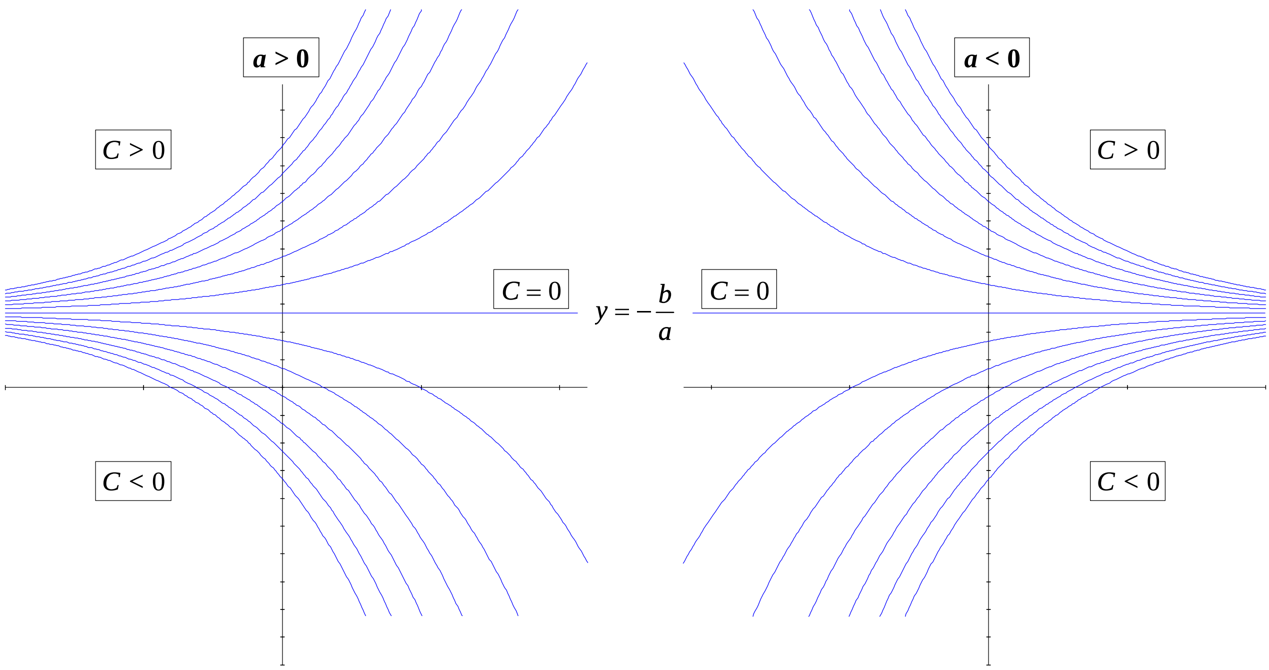
C'est une équation différentielle du type $y' = ay + b$ avec $a = -\dfrac{1}{RC}$ et $b = \dfrac{E}{R}$ d'où :

$$q(t) = K\,\mathbf{e}^{-\frac{t}{RC}} + EC$$

En dérivant : $$i(t) = I_0\,\mathbf{e}^{-\frac{t}{RC}}$$



3.2. Allure des solutions :



On constate que toutes les solutions ont la même limite en $-\infty$ (lorsque $a > 0$) ou en $+\infty$ (lorsque $a < 0$) :

$$\lim_{x \to -\infty}\left(C\mathbf{e}^{ax} - \frac{b}{a}\right) = -\frac{b}{a} \quad \text{lorsque } a > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty}\left(C\mathbf{e}^{ax} - \frac{b}{a}\right) = -\frac{b}{a} \quad \text{lorsque } a < 0$$

Cas particuliers :

- si $a = 0$, alors l'équation différentielle (E) se réduit simplement à $y' = b$ dont les solutions sont les fonctions affines $x \longmapsto bx + C$ où C est une constante.
- si $b = 0$, on est ramené au cas de la situation du paragraphe 2.