Démonstration : Equations différentielles : $y' = ay + b$

Dans cette démonstration, on suppose que a est un nombre donné non nul. Le cas « $a = 0$ » est un cas trivial qui fait l'objet d'une autre démonstration (très simple)

Le théorème à démontrer est le suivant :

> Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$
> Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions
> f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$, où C est un réel quelconque.
> Pour tout couple $(x_0 ; y_0)$ de réels donnés, cette équation admet une et une seule solution f telle que $f(x_0) = y_0$

Application de ce théorème : *équation différentielle* $y' = y$ ($a = 1$ et $b = 0$)

La fonction exponentielle à variable réelle : $f(x) = e^x$ est l'unique fonction f qui vérifie :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f'(x)$ et $f(0) = 1$

DEMONSTRATION :

Etape ① : Recherche d'une « solution particulière » notée h

1.1) Soit h la fonction telle que $h(x) = -\dfrac{b}{a}$ La fonction dérivée de h est : $h'(x) = 0$

Comme $0 = a\left(-\dfrac{b}{a}\right) + b$, la fonction h est une solution dite « particulière » de l'équation $y' = ay + b$

➔ On a donc : $h' = ah + b$ (1)

1.2) Soit f une solution quelconque de $y' = ay + b$

Remarque : la fonction f existe puisque que la fonction h existe ➔ On a donc : $f' = af + b$ (2)

En faisant (2) − (1), on obtient $f' - h' = (af + b) - (ah + b) \iff (f - h)' = a(f - h)$

On obtient donc que la fonction $f - h$ est solution de l'équation $y' = ay$

Réciproquement, si la fonction $f - h$ est solution de l'équation $y' = ay$ alors

$(f - h)' = a(f - h) \iff f' - h' = af - ah$ donc

$f' = af + (h' - ah) \iff f' = af + b$ donc la fonction f est solution de $y' = ay + b$

Conclusion : On vient de démontrer que :

> La fonction f est solution de $y' = ay + b \iff$
> La fonction $(f - h)$ est solution de $y' = ay$ « équation homogène associée »

Etape ② : Résolution de l'équation « homogène associée » : $y' = ay$ (E)

Il est « *évident* » que les fonctions $g(x) = C \times e^{ax}$ sont solutions de l'équation (E)

Démontrons que seules les fonctions $g(x) = C \times e^{ax}$ sont solutions de l'équation (E)

Soit g une fonction « *quelconque* » solution de l'équation (E) : $g' = ag \iff g'(x) = ag(x)$

Soit k la fonction telle que $k(x) = g(x) \times e^{-ax}$ (*changement de variable : lire le commentaire* ③)

Comme $e^{-ax} \neq 0$ on a : $g(x) = k(x) \times e^{ax}$

Calculons $g'(x)$: $g'(x) = k'(x)\times e^{ax} + a\times k(x)\times e^{ax} = k'(x)\times e^{ax} + a\times g(x)$

On obtient : si $g' = a\times g$ alors $g'(x) = a\times g(x) \Leftrightarrow k'(x)\times e^{ax} = 0$

$\Leftrightarrow k'(x) = 0$

$\Leftrightarrow k(x) = Cte = C$

<u>Conclusion</u> :

Les solutions de l'équation $y' = ay$ sont donc les fonctions : $g(x) = Ce^{ax}$

Et *compte tenu de ce qui a été montré précédemment :*

Les solutions de l'équation $y' = ay + b$ sont les fonctions : $f(x) = Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$

Si de plus, on impose la condition initiale : $y(x_0) = y_0$, on a $y_0 = C\times e^{ax_0} - \dfrac{b}{a}$

$\Leftrightarrow C\times e^{ax_0} = y_0 + \dfrac{b}{a}$

$\Leftrightarrow C = \left(y_0 + \dfrac{b}{a}\right)\times e^{-ax_0}$

C'est-à-dire : $f(x) = \left(y_0 + \dfrac{b}{a}\right)\times e^{a(x-x_0)} - \dfrac{b}{a}$

<u>Théorème</u> : **L'unique solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$ est la fonction : $f(x) = \left(y_0 + \dfrac{b}{a}\right)\times e^{a(x-x_0)} - \dfrac{b}{a}$**

<u>Commentaire</u> ③ :

« *Ce changement de variable est la clé de la démonstration de l'étape* ② »