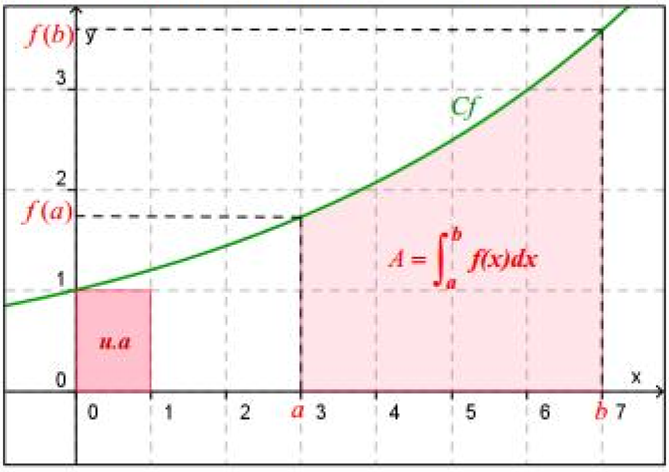
Une « INTEGRALE » d’une fonction sur un intervalle [a , b]

Sur le graphique ci-dessous, **l'unité d'aire (*u*.a)** est le rectangle de longueurs 1 unité sur l'axe des abscisses et 1 unité sur l'axe des ordonnées (qui peuvent être de longueurs différentes dans un repère orthogonal).



Définition 1: Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$.

On appelle **intégrale de a à b de la fonction f**, l'aire A du domaine limité par la courbe Cf, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, exprimées en unités d'aire ($u.a$).

On note : $A=\int_a^b f(x)dx$ (en $u.a$)

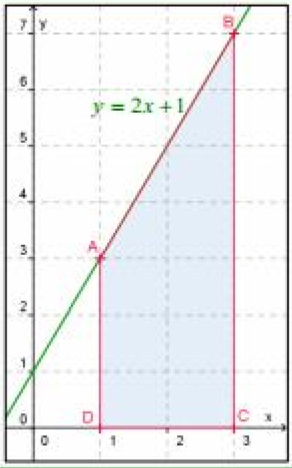
Remarques : • $\int_a^b f(x)dx$ se lit aussi "somme de a à b de $f(x)dx$ ".

• x est appelé "**variable muette**". a et b sont les **bornes** de l'intégrale.

Intégrale d'une fonction affine sur un intervalle

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 2x+1$.

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 (2x+1)dx = Aire(ABCD)$$
$$= DC \times \frac{AD+BC}{2} = 2\times\frac{3+7}{2}$$
$$= 10\ u.a$$



Propriété 1: Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$ contenant le réel c.

• $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

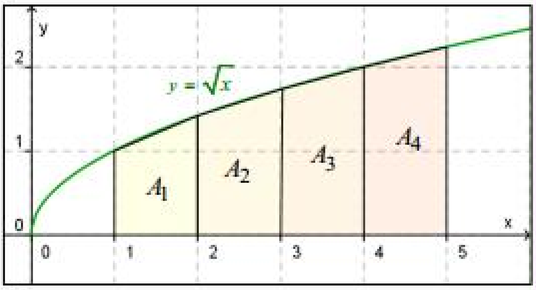
• $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Application : Approximation d'une intégrale

Approximation de $\int_1^5 \sqrt{x}dx$

$$\int_1^5 \sqrt{x}dx = \int_1^2 \sqrt{x}dx + \int_2^3 \sqrt{x}dx + \int_3^4 \sqrt{x}dx + \int_4^5 \sqrt{x}dx$$
$$\approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$A_1 = 1\times\frac{1+\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\ ;\ A_2 = 1\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$$
$$A_3 = 1\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{4}}{2} = \frac{\sqrt{3}+2}{2}\ ;\ A_4 = 1\times\frac{\sqrt{4}+\sqrt{5}}{2} = \frac{2+\sqrt{5}}{2}$$



$$\int_1^5 \sqrt{x}dx \approx \frac{1+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}+2}{2} + \frac{2+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 6{,}8\ u.a$$

Propriété 2: Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$.

La fonction F définie sur $[a,b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a,b]$ telle que :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [a,b],\ F'(x) = f(x)}$$